KURZER ABRISS EINER

GESCHICHTE

DER

ELEMENTAR-MATHEMATIK

mit Hinweisen

auf die sich anschliessenden höheren Gebiete

von

DR KARL FINK

Professor an der Realschule zu Tübingen

Tübingen 1890

Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung

Druck von H. Laupp jr. in Tübingen.

Vorwort.

Wenn die Geschichte einer Wissenschaft Wert für jeden besitzt, welchen Beruf oder Neigung in nähere Beziehung zu ihr bringt, — wenn die Kenntnis dieser Geschichte unabweislich für alle ist, deren Wirksamkeit einer Weiterentwicklung wissenschaftlicher Prinzipien oder der Wege ihrer nutzbringenden Anwendung gilt, so ist die Bekanntschaft mit dem Werden und Wachsen eines Wissenszweiges besonders wichtig auch für denjenigen, der die Elemente dieser Wissenschaft lehren oder in die höheren Gebiete derselben lernend eindringen will.

Die vorliegende Geschichte der Elementarmathematik beabsichtigt, Studierenden der Mathematik einen historischen Ueberblick über die elementaren Teile dieser Wissenschaft zu geben, und dem Lehrer der Elemente Gelegenheit zu verschaffen, mit wenig Zeitaufwand die ihm zum grossen Teil längst bekannten Dinge im Zusammenhang übersehen und beim Unterricht in gelegentlichen Bemerkungen verwerten zu können. Die erfrischende Kraft historischer Bemerkungen gerade für den Elementarunterricht ist von keiner Seite bestritten worden, und es gibt ja Lehrbücher für die mathematischen Elemente (es seien unter den neueren nur die Baltzer'schen und Schubert'schen genannt), welche der Geschichte der Wissenschaft, der sie dienen, in besonderen Anmerkungen eine gebührende Stelle einräumen. Es ist nun gewiss wünschenswert, dass gegenüber vereinzelten historischen Hinweisen eine zusammen-

hängende, freilich nicht für die Hand des Schülers bestimmte Darstellung der Geschichte der Elementarmathematik geboten werde, nicht als Ersatz der grossen Werke über Geschichte der Mathematik, sondern nur als erstes, in den Grundtönen besonders deutlich gehaltenes Bild der Hauptergebnisse mathematischer Geschichtsforschung.

Hier ist der Versuch gemacht worden, die Geschichte der einzelnen Gebiete mathematischen Wissens von einander abzusondern, dergestalt, dass der Reihe nach über Zahlensysteme und Zahlzeichen, über das gemeine Rechnen, die allgemeine Arithmetik und Algebra, die Geometrie und Trigonometrie berichtet wird, um auf diese Art innerhalb des engeren Kreises eines Sondergebiets der Elemente eine rasche und sichere Orientierung zu ermöglichen. Allerdings kann gegen ein derartiges Verfahren der Vorwurf erhoben werden, dass auf solche Weise der kulturhistorische Gesamtüberblick einer gewissen Epoche notleidet. Allein man möge zugeben, dass es sich bei einer Geschichte der Elementarmathematik, bei einem in so bescheidene Grenzen eingeschlossenen Schriftchen nicht um eine erschöpfende Schilderung ganzer Zeiträume mit allen ihren in die Vergangenheit und Zukunft greifenden Wechselbeziehungen handeln kann.

Von vornherein ist darauf verzichtet worden, die nicht minder interessante geschichtliche Entwicklung der Mechanik und Astronomie darzustellen. Obwohl nicht geleugnet werden kann, dass durch diese Abtrennung verwandter Gebiete dem Ganzen das Gepräge einer gewissen Abgeschlossenheit fehlt, so darf doch die Hoffnung ausgesprochen werden, dass dieser Mangel in einer Darstellung der elementaren Partien der Mathematik, die sich mit jenen Zweigen nur wenig berühren, sich nicht allzu sehr fühlbar machen wird gegenüber dem Bestreben, das Notwendigste in einem eng begrenzten Rahmen zu bieten.

Im Interesse einer möglichst gedrängten Schilderung

mussten ferner die biographischen Notizen, welche einer breiteren Darstellung oft grossen Reiz verleihen, in einen besonderen Abschnitt verwiesen werden; dieser enthält auch als Anhang die Namen der Mathematiker der Gegenwart, soweit sie an Hochschulen oder an den der Fortentwicklung der mathematischen Wissenschaften in hervorragendem Masse dienstbaren Zeitschriften thätig sind. Dieser Anhang insbesondere will in keiner Weise Anspruch auf Vollständigkeit erheben.

Die Entstehung dieses Buches ist auf Anregungen zurückzuführen, welche der Verfasser bei Gelegenheit der halbmonatlichen Zusammenkünfte eines von Herrn Professor Dr. *A. Brill* gegründeten und geleiteten »mathematischen Kränzchens« in Tübingen erhalten hat, und für welche hier der geziemende Dank ausgesprochen werden soll, insbesondere dem Vorsitzenden jenes Kränzchens gegenüber, dessen Ausführungen für einzelne Teile der vorliegenden Arbeit bestimmend geworden sind. Diese Vereinigungen haben dem Verfasser erwünschte Gelegenheit geboten, durch die den verschiedensten Gebieten der Wissenschaft angehörigen Vorträge, durch jeweils sich anschliessende Diskussionen und Besprechungen der jüngsten Litteratur in jene Gedankenkreise einzudringen, welche heutzutage die höheren Disziplinen der Mathematik beherrschen. Das war denn auch für ihn der Anstoss, seine Studien durch Eingehen auf die neueste Geschichte der Wissenschaft zu vervollständigen. Die Ergebnisse solcher Untersuchungen finden sich in diesen Blättern niedergelegt, vielleicht in grösserer Ausdehnung, als es für den nächsten Zweck des Buches notwendig und dem Titel entsprechend erscheint. Aber bei dem Mangel einer derartigen Zusammenstellung wird man einen ersten Versuch, der als solcher wohl auf eine freundliche Beurteilung Anspruch erheben darf, angesichts der fortwährend sich weiter spaltenden Wissenschaft für nicht ungeeignet halten, wenn man noch berück-

sichtigt, dass es nicht wohl möglich erscheint, eine scharfe Trennungsmarke zwischen der elementaren und höheren Mathematik zu errichten, da einerseits gewisse Probleme der Elementarmathematik nach und nach zur Entwicklung höherer Gebiete Veranlassung gegeben haben, und andererseits aus den Errungenschaften eben dieser neuen Zweige ein helles Licht auf elementare Teile gefallen ist. Zudem mag es manchem Studierenden und Lehrer angenehm sein, auch hier wenigstens das Grundlegende zu finden.

Die überaus reiche, namentlich deutsche Litteratur, welche dem Verfasser zur Verfügung stand, findet sich in einem eigenen Verzeichnis zusammengestellt und es ist auf diese Zusammenstellung im Texte nur durch Nummern verwiesen, um einer Ueberzahl der lästigen und das Auge ermüdenden Fussnoten zu entgehen. In reichlichem Masse ist vom Verfasser das treffliche »Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik« benützt worden, welches in übersichtlicher Gliederung die neuesten Erscheinungen der mathematischen Litteratur aufzählt und bespricht.

Tübingen, im Juni 1890. K. Fink.

Inhalts-Uebersicht.

Seite

Vorwort III

Allgemeiner Ueberblick 1

I. Zahlensysteme und Zahlzeichen 4

II. Gemeines Rechnen.

Ueberblick 14

Erste Periode. Das Rechnen der ältesten Völker bis zu den Arabern.

1. Das Rechnen mit ganzen Zahlen 18
2. Das Rechnen mit Brüchen 24
3. Angewandtes Rechnen 26

Zweite Periode. Vom 8.—14. Jahrhundert.

1. Das Rechnen mit ganzen Zahlen 27
2. Das Rechnen mit Brüchen 31
3. Das angewandte Rechnen 32

Dritte Periode. Vom 15.—19. Jahrhundert.

1. Das Rechnen mit ganzen Zahlen 32
2. Das Rechnen mit Brüchen 38
3. Das angewandte Rechnen 39

III. Allgemeine Arithmetik und Algebra.

Ueberblick 47

Erste Periode. Von den ältesten Zeiten bis zu den Arabern.

1. Allgemeine Arithmetik 48

Operationszeichen der Aegypter 48. Die griechische Arithmetik 49; Benennungen und Zeichen 49; zahlentheoretische

Seite

Untersuchungen 50; Reihen 52; das Irrationale 52; negative Grössen 54; die grossen Zahlen bei Archimedes 54. Die römische Arithmetik 55. Die indische Arithmetik 55; Bezeichnungen 55; negative Zahlen 56; das Potenzieren und Radizieren 56; Kombinatorik 56; Reihen 57. Chinesische Arithmetik 57. Arabische Arithmetik 57; »Algorithmus« 57; Wurzelzeichen 58; Zahlentheoretisches 58; Reihen 58.

2. Algebra 59

Die Aegypter 59. Die Griechen; Form einer Gleichung 59; Gleichungen ersten Grads 60; Gleichungen zweiten Grads (Flächenanlegung) 60; Gleichungen dritten Grads 63; unbestimmte Gleichungen (das Rinderproblem des Archimedes; Diophant's Lösungen) 63. Die indische, chinesische und arabische Algebra 65.

Zweite Periode. Bis zur Mitte des siebenzehnten Jahrhunderts.

1. Allgemeine Arithmetik 72

Bezeichnungsweisen der Italiener und der deutschen Cossisten 73; die irrationalen und negativen Grössen 76; Potenzen 78; Reihen 79; Stifels Würfelverdopplung 79; Zauberquadrate 80.

2. Algebra 81

Darstellung der Gleichungen 82; die Gleichungen ersten und zweiten Grads 82; die vollständige Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grads auf italienischem Boden 85; Arbeiten der deutschen Cossisten 86; Anfänge einer Theorie der algebraischen Gleichungen 87.

Dritte Periode. Von der Mitte des siebenzehnten Jahrhunderts bis zur Gegenwart. 88

Bezeichnungen 89; Pascal's arithmetisches Dreieck 89; die irrationalen und komplexen Zahlen 90; Grassmann's Ausdehnungslehre 97; Quaternionencalcul 98; Logikcalcul 99; Kettenbrüche 100; eigentliche Zahlentheorie 101; Tafeln der Primzahlen 107; symmetrische Funktionen 109; Elimination 109; Invariantentheorie 111; Wahrscheinlichkeitsrechnung 113;

Seite

Methode der kleinsten Quadrate 114; Kombinationslehre 115; Reihen 116; Auflösung algebraischer Gleichungen 119; Kreisteilungsgleichung 123; Untersuchungen von Abel und Galois 126; Verwendung der Substitutionentheorie 127; die Gleichung fünften Grads 127; angenäherte Bestimmung reeller Wurzelwerte 128; Determinanten 129; Differentialrechnung und Integralrechnung 130; Differentialgleichungen 135; Variationsrechnung 138; Elliptische Funktionen 140; Abelsche Funktionen 145; die strengere Richtung der Analysis 146.

IV. Geometrie.

Ueberblick 148

Erste Periode. Aegypter und Babylonier 149

Zweite Periode. Die Griechen 151

Geometrie bei Thales und Pythagoras 151; Verwendung der Quadratrix zur Quadratur des Kreises und zu der Dreiteilung des Winkels 152; die Elemente Euklid's 154; Archimedes und dessen Nachfolger 155; die Lehre von den Kegelschnitten 158; ebene, körperliche und lineare Oerter 163; die Flächen zweiter Ordnung 165; die stereographische Projektion Hipparch's 167.

Dritte Periode. Römer, Inder, Chinesen, Araber . 167

Vierte Periode. Von Gerbert bis Descartes 170

Gerbert und Leonardo 170; Widmann und Stifel 172; Viète und Keppler 174; Lösung von Aufgaben mit nur einer Zirkelöffnung 176; Projektionsmethoden 177.

Fünfte Periode. Von Descartes bis zur Gegenwart. 178

Descartes' analytische Geometrie 179; Cavalieri's Methode der unteilbaren Grössen 184; Pascal's geometrische Arbeiten 186; Newton's Untersuchungen 187; Cramer'sches Paradoxon 189; Pascal'sche Schnecke und andere Kurven 189; analytische Geometrie des Raums 190; einige kleinere Untersuchungen 191; Einführung der projektiven Geometrie 193; Möbius' barycentrischer Calcul 196; Bellavitis' Aequipollenzen 197; Plücker's Untersuchungen 198; die Steiner'schen Entwicklungen 201; Malfatti's Aufgabe 202; v. Staudt's Geometrie

Seite

der Lage 203; darstellende Geometrie 204; formentheoretische Entwicklungen und Geschlecht einer algebraischen Kurve 206; Raumkurven 208; abzählende Geometrie 208; Theorie der Flächenabbildung 209; Differentialgeometrie (Theorie der Krümmung der Flächen) 210; Nichteuklidische Geometrie 213; Pseudosphären 216; Geometrie von n Dimensionen 217; Geometria und Analysis situs 218; Berührungstransformationen 218; geometrische Wahrscheinlichkeit 218; Geometrische Anschauungsmittel 218; die Mathematik der Neuzeit 220.

V. Trigonometrie.

Ueberblick 222

Erste Periode. Von den ältesten Zeiten bis zu den Arabern 222

Die Aegypter 222. Die Griechen 223. Die Inder 224. Die Araber 225.

Zweite Periode. Vom Mittelalter bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts 226

Viète und Regiomontan 226; Tafeln der trigonometrischen Funktionen 228; Logarithmen 229.

Dritte Periode. Von der Mitte des 17. Jahrhunderts bis zur Gegenwart 232

VI. Biographische Notizen.

a. Aelteste Zeit 234
b. Griechen 234
c. Römer 236
d. Inder 236
e. Araber 237
f. Klostergelehrte des Mittelalters 237
g. Vom Mittelalter bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts . . 237
h. Von der Mitte des 17. Jahrhunderts bis zur Gegenwart . 240
i. Mathematiker der Gegenwart 251

VII. Litteratur-Verzeichnis 255

Register 261

Allgemeiner Ueberblick.

Die Uranfänge der Entwicklung mathematischer Wahrheiten gehen auf die ältesten Kulturvölker, von deren Litteratur Ueberreste vorhanden sind, auf die Aegypter und Babylonier zurück. Einerseits durch das praktische Bedürfnis veranlasst, andererseits aus wirklichem Wissenstrieb einzelner Kreise, so namentlich der Priesterkaste, entsprungen, tauchten arithmetische und geometrische Kenntnisse auf, die wohl nur selten durch schriftliche Ueberlieferung weiter gegeben wurden. Von letzterer besitzt man aus der babylonischen Zeit nur einige wenige Spuren, aus der altägyptischen Periode dagegen wenigstens ein Handbuch, das des *Ahmes*, welches aller Wahrscheinlichkeit nach im 2. Jahrtausend vor Christo entstanden ist.

Die eigentliche Entfaltung mathematischen Wissens beginnt, offenbar angeregt durch ägyptischen und babylonischen Einfluss, in der griechischen Welt. Sie äussert sich vorwiegend als Geometrie und tritt im Zeitalter eines *Euklid*, eines *Archimedes*, *Eratosthenes* und *Apollonius* in die erste klassische Periode ein, welche freilich nur kurze Zeit andauert. Sie nähert sich in ihren Nachklängen mehr der arithmetischen Seite, wird aber bald so vollständig von den hochgehenden Wogen stürmischer Zeiten verschlungen, dass Jahrhunderte dazu gehören, bis in fremdem Boden aus griechischen Werken, welche dem allgemeinen Verderben entgangen sind, eine neue verheissungsvolle Saat Wurzel fassen konnte.

Man hätte erwarten können, dass die Römer mit Begierde das schöne Erbe der von ihnen besiegten Griechen auch auf allen geistigen Gebieten angetreten hätten, dass ihre Söhne durch die griechischen Lehrer, denen sie willig ihr Ohr schenkten, sich auch für griechische Mathematik hätten begeistern lassen. Davon sind jedoch kaum Spuren zu entdecken. Die Römer verstanden es allerdings sehr gut, die praktischen Resultate griechischer Geometer und Feldmesser für ihre staatsmännischen Zwecke zu verwerten — und diese Ausnützung geschah häufig durch Angehörige der spätgriechischen Schulen selbst, — aber eine eigene mathematische Forschung kennt die römische Geschichte nicht; ja sie hat sogar nicht selten griechisches Wissen unverstanden und deshalb in entstellter Form späteren Zeiten überliefert.

Wichtiger für die Weiterentwicklung der Mathematik sind die Beziehungen griechischer Lehren zu den Forschungen der Inder und Araber. Die Inder zeichneten sich durch eine hervorragende rechnerische Begabung aus; sie sind die ersten Zahlentheoretiker gewesen und haben auf dem Gebiete der Arithmetik eine Reihe ganz fundamentaler Entdeckungen gemacht. Was sie noch besonders auszeichnet, ist, dass sie für die Einflüsse der Wissenschaft westlicher Völker, der Babylonier, und insbesondere der Griechen, nicht unempfänglich waren, sondern das von aussen Aufgenommene ihrem System angliederten und es selbständig verarbeiteten. — Eine ähnliche selbständige Auffassung und Urteilskraft zeigen die Araber im allgemeinen nicht. Ihr Hauptverdienst, das aber ein wirkliches Verdienst ist, besteht darin, dass sie mit wahrem Bienenfleiss litterarische Schätze indischen, persischen und griechischen Ursprungs sammelten und in ihre Sprache übertrugen. Die Höfe muhammedanischer Fürsten waren vom 9. bis 13. Jahrhundert gar häufig glänzende Heimstätten einer hervorragenden wissenschaftlichen Thätigkeit, und diesem

Umstande allein ist es zu verdanken, dass nach langer und dichter Finsternis in verhältnismässig kurzer Zeit der Westen Europas für die mathematischen Wissenschaften erschlossen wurde.

Die Klostergelehrsamkeit des frühesten Mittelalters war ihrer ganzen Art nach nicht dazu angethan, tiefer in mathematische Dinge einzudringen oder nach zuverlässigen Quellen für mathematische Kenntnisse zu forschen. Es waren zunächst italienische Kaufleute, deren praktischer Blick und bildsames Geschick aus dem Verkehr mit dem muhammedanischen Westafrika und Südspanien reichlichen Nutzen für die gewöhnliche Rechenkunst zog. Bald entwickelte sich eine eigentliche Forschung, und der erste grosse Triumph der neu aufstrebenden Wissenschaft bestand in der Lösung der Gleichung 3. Grads durch *Tartaglia*. — Aber auch die spätere Klostergelehrsamkeit hatte sich eifrig bemüht, namentlich westarabische Bildung durch Uebersetzung von arabischen Schriften ins Lateinische zu verbreiten.

Im 15. Jahrhundert erst tritt Deutschland durch *Peurbach* und *Regiomontanus* in den grossen Wettbewerb zur Förderung der Mathematik ein. Von da ab bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts sind die deutschen Mathematiker zumeist Rechner, d. h. Lehrer an Rechenschulen, und in zweiter Linie erst Algebraiker, wobei freilich hervorgehoben werden muss, dass es doch Geister gab, die in grössere Höhen hinaufstrebten. Zu ihnen zählt vor allen andern *Keppler*, zu ihnen gehören aber auch *Stifel*, *Rudolff* und *Bürgi*. Sicher ist, dass das elementare Rechnen und die gewöhnliche Algebra, wesentlich beeinflusst durch die italienische Schule, in dieser Zeit auf deutschem Boden eine für die folgende Epoche gewinnbringende Ausbildung erreichten.

Die neue Zeit in der Geschichte der Mathematik beginnt ungefähr Mitte des 17. Jahrhunderts. *Descartes*

entwirft die Grundlehren der analytischen Geometrie, *Leibniz* und *Newton* treten als Schöpfer der Differentialrechnung auf. Jetzt sind die Tage gekommen, wo die Geometrie, seit ihrer Verbannung aus griechischen Stätten nur von einzelnen wenigen und auch von diesen oft nur unvollständig in ihrer wahren Bedeutung geschätzt, neben der Analysis in ein gedeihliches Wachstum eintritt und diese Schwesterwissenschaft zur Ableitung ihrer Resultate aufs reichlichste ausbeutet, so dass Jahre hereinbrechen, in welchen die Geometrie durch glänzende Entdeckungen die Analysis wenigstens vorübergehend in den Schatten zu stellen vermag.

Die einzigartige Wirksamkeit des grossen *Gauss* teilt die neue Zeit in 2 Abschnitte. Vor *Gauss* — die Festigung der Methoden der Differential- und Integralrechnung und der analytischen Geometrie, sowie Vorbereitungen beschränkteren Umfangs für später auftretende Richtungen, — mit *Gauss* und nach ihm die grossartige Entwicklung der modernen Mathematik, welcher Sondergebiete von ehedem ungeahnter Mächtigkeit und Tiefe angehören. Zahlentheorie, moderne Algebra, projektive Geometrie beschäftigen die Mathematiker des 19. Jahrhunderts und suchen, dem Drange menschlicher Erkenntnis gehorchend, ihr Licht in Fernen zu tragen, welche bis heute dem forschenden Geist noch dunkel geblieben sind.

I. Zahlensysteme und Zahlzeichen.

Eine unerschöpfliche Fülle von Einwirkungen der Aussenwelt auf den menschlichen Geist hat ihren gesetzmässigen Ausdruck bei der Bildung der Sprache und der Schrift in Zahlen und Zahlzeichen gefunden. Allerdings wird ein Zählen besonderer Art noch bei Volksstämmen von sehr niederer Bildungsstufe, ja sogar bei Tieren vorkommen können: »Auch die Ente zählt ihre Jungen«[47].

Wo aber die Art und Beschaffenheit der Gegenstände für die Bildung der Zahl selbst unwesentlich geworden ist, da erst hat das menschliche Zählen begonnen.

Das älteste Zählen war schon in seinen Anfängen ein Rechnen, ein Zufügen, wohl auch in besonders elementaren Fällen ein Vervielfachen, ausgeführt an den der Zählung unterworfenen Gegenständen selbst, oder an anderen leicht zu beschaffenden Objekten (an Steinchen, an Muscheln, an den Fingern). Dabei entstanden die Zahlwörter. Die häufigsten derselben gehören ohne Zweifel mit zu den Urgebieten der Sprache; ihre Gesamtheit erweiterte sich mit der fortschreitenden Sprachentwicklung mehr und mehr, indem die gesetzmässige Verbindung einzelner Glieder die Bildung neuer Zahlen veranlasste und begünstigte. So entstanden Zahlensysteme.

Dass hiebei die Grundzahl 10 des dekadischen Systems für die gewöhnliche Zahlendarstellung fast überall von fundamentaler Bedeutung wurde, findet seine Erklärung in der häufigen Benützung der Finger bei der Durchführung grundlegender Rechnungsoperationen. Alle alten Kulturvölker kannten das Fingerrechnen, und noch heute ist es bei manchen Naturvölkern in bemerkenswerter Ausdehnung gebräuchlich. Gewisse südafrikanische Stämme lassen Zahlen, welche 100 übersteigen, durch drei Personen vorrechnen; die erste zählt Einer, die zweite Zehner, die dritte Hunderter an den Fingern ab, und zwar je mit dem kleinen Finger der linken Hand beginnend bis zum kleinen Finger der Rechten fortschreitend. Die erste Person zählt beständig, die übrigen erheben einen weiteren Finger, sobald ein Zehner oder ein Hunderter voll geworden ist[16]).

Einige Sprachen enthalten Zahlwörter, denen ein System mit der Basis 5 oder 20 zu Grunde liegt, ohne dass jedoch solche Systeme eine vollständige Ausbildung erfahren hätten; sie durchbrechen nur an gewissen Stellen das

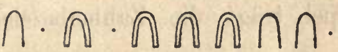
dekadische System. In anderen Fällen treten, besonderen Bedürfnissen entsprechend, als Grundzahlen 12 und 60 auf. Ein Undezimalsystem besitzen die Neuseeländer, deren Sprache für die ersten Potenzen von 11 mit besonderen Wörtern ausgestattet ist und demgemäss 12 als 11 mit 1, 13 als 11 mit 2, 22 als 2 mal 11 darstellt[16]).

Beim sprachlichen Ausbau eines Zahlensystems herrschen als bestimmende Operationen für Zusammensetzungen Addition und Multiplikation vor; in selteneren Fällen kommt die Subtraktion oder gar die Division zur Verwendung. Es heist z. B. 18 im Lateinischen 10 + 8 (decem et octo), im Griechischen 8 + 10 (ὀκτω-καί-δεκα), im Französischen 10 | 8 (dix-huit), im Deutschen 8 | 10 (acht-zehn), im Lateinischen 20 — 2 (duo-de-viginti), im Basbreton 3 . 6 (tri-omc'h), im Welsch 2 . 9 (dew-naw), im Aztekisch 15 + 3 (caxtulli-om-ey), und 50 im Vaskischen »halb hundert», im dänischen »ditthalbmalzwanzig« [47]).

Die schriftliche Darstellung der Zahlen zeigt überall, wo sie nicht bei den ersten Anfängen stehen geblieben ist, trotz grösster Mannigfaltigkeit in den Formen ein allgemeines Gesetz, nach welchem die höhere Stufe der niederen im Sinne der Schrift vorangeht[47]). So steht beispielsweise in einer vierziffrigen Zahl die Ziffer der Tausender bei den Phöniziern rechts, bei den Chinesen oben; erstere schreiben nemlich von rechts nach links, letztere von oben nach unten. Eine auffallende Ausnahme von diesem Gesetz bildet die subtraktive Zahlendarstellung der Römer in IV, IX, XL etc., wo also die kleinere Zahl in der Schrift der grösseren vorangeht.

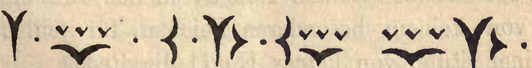
Bei den Aegyptern kennt man Zahlendarstellungen in der von rechts nach links verlaufenden hieratischen Schrift und in Hieroglyphen. In letzterem Fall ist die Richtung der Schrift wechselnd. Die Zahlen werden entweder alphabetisch ausgeschrieben, oder es finden sich die Zahlzeichen für jede

Einheit so oft wiederholt, als Einheiten der betreffenden Art dargestellt werden sollen. Aus einem Grabe in der Nähe der Pyramiden von Gizeh stammen hieroglyphische Zahlzeichen, welche 1 durch einen vertikalen Strich, 10 durch eine Art Hufeisen, 100 durch eine kurze Schneckenlinie, 10 000 durch einen deutenden Finger, 100 000 durch einen Frosch, 1 000 000 durch einen sich verwundernden Mann darstellen. Bei den hieratischen Zahlzeichen steht dem Gesetz der Grössenfolge entsprechend die Ziffer für die Einheit höherer Stufe immer rechts von der niedrigeren Stufe. Die Wiederholung der Zeichen für eine Einheit einer beliebigen Stufe fällt weg, da besondere Zeichen für alle 9 Einer, Zehner, Hunderter und Tausender vorhanden sind. In der demotischen Hieroglyphenschrift sind die Zahlen 1, 10, 32 dargestellt durch:



Von den hieratischen Zahlzeichen ist z. B. | = 1, || = 2, ||| = 3, — = 4, ═ = 8, ∧ = 10, $\overline{\wedge}$ = 20, ∸ = 40.

Die **babylonische Keilschrift** geht von links nach rechts, was bei einer semitischen Sprache auffällig erscheinen muss. Dem Satz von der Grössenfolge entsprechend stehen also in einer Zahl die Ziffern für die Einheiten höherer Stufe **links** von denen niederer Stufe. Die zur schriftlichen Darstellung benützten Zeichen bestehen der Hauptsache nach aus dem Horizontalkeil ≻, dem Vertikalkeil Y und dem Winkelhaken ∠. Die Zeichen werden neben einander, oder zur Erleichterung der Uebersicht und der Raumersparnis halber über einander geschrieben. Es stehen in der Zahlenkeilschrift für 1, 4, 10, 100, 14, 400 die Zeichen:



Bei Zahlen über 100 tritt ausser der blossen Nebeneinanderstellung noch ein multiplikatives Verfahren auf; es wird das Zeichen, welches die Anzahl der Hunderter angibt, links vor

das Zeichen für 100 gesetzt. Ein Zeichen für die Null (für fehlende Einheiten einer Stufe) besitzen die Babylonier nicht. Von dem System mit der Grundzahl 60, das in den Schriften der babylonischen Weisen (Astronomen und Mathematiker) eine Rolle spielt, wird an anderer Stelle die Rede sein.

Die Phönizier, deren 22 Buchstaben aus hieratischen Zeichen der Aegypter entstanden sind, schrieben entweder die Zahlwörter ganz aus, oder sie gebrauchten besondere Zeichen (für die Einer vertikale, für die Zehner horizontale Striche). Bei den Syrern kam in verhältnismässig später Zeit die Sitte auf, durch die 22 Buchstaben ihres Alphabets die Zahlen 1, 2, . . 9, 10, 20, . . . 90, 100, . . . 400 zu bezeichnen; 500 war 400 + 100 etc. Die Tausender wurden durch Einer mit einem Komma unten rechts dargestellt. Denselben Stempel trägt die Zahlenbezeichnung bei den Hebräern.

Die älteste griechische Zahlenschreibung benutzte (abgesehen von der Verwendung ausgeschriebener Zahlwörter) die Anfangsbuchstaben der Grundzahlen (I für 1, π für 5, Δ für 10, δέκα) und setzte diese zu grösseren Zahlen zusammen. Diese Zeichen fanden in dem byzantinischen Grammatiker *Herodianus* (200 n. Chr.) einen Darsteller; sie heissen daher herodianische Zahlzeichen. Kurze Zeit nach 500 v. Chr. kamen 2 neue Bezeichnungsarten auf. Die eine benützte die 24 Buchstaben des jonischen Alphabets in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge zur Fixierung der Zahlen von 1 bis 24; die andere stellte diese Buchstaben in anscheinend beliebiger, aber ein für allemal fest gewählter Ordnung für dieselben Zahlen 1 bis 24 in den Text ein. Auch hier ist von keinem besonderen Zeichen für fehlende Einheiten einer Stufe, von keiner Null die Rede.

Die Zahlzeichen der Römer sind diesem Volke vermutlich von den Etruskern vererbt worden. Bemerkenswert ist das Fehlen der Null, die Verminderung eines Zeichens

höheren Wertes durch ein vorgesetztes Zeichen niedrigerer Ordnung (IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90), und zwar gerade da, wo die Sprache ein solch auffälliges Verfahren nicht andeutet, endlich die multiplikative Wirkung eines Querstrichs über Zahlzeichen ($\overline{\text{XXX}}$ = 30 000, $\overline{\text{C}}$ = 100000). Auch für gewisse Brüche gab es eigene Zeichen und Namen. Nach *Mommsen* sind die römischen Zahlzeichen I, V, X Nachbildungen des Fingers, der Hand, der Doppelhand. *Zangemeister* geht davon aus, dass decem zusammenhänge mit decussare, das eine senkrechte oder schräge Kreuzung bedeute, und behauptet, dass jede zum Zeichen einer dekadischen Einheit als Kreuzung hinzutretende gerade oder krumme Linie die entsprechende Zahl verzehnfache. In der That sind auf Denkmälern die Bildungen für 1, 10 und 1000, ebenso die für 5 und 500 nachgewiesen worden *).

Von ganz besonderem Interesse für die Elementararithmetik ist die Zahlenschrift der Inder, weil diese Arier unzweifelhaft das jetzt herrschende Positionssystem zuerst anwendeten und auszubilden vermochten. Ihre ältesten Zahlzeichen für 1 bis 9 waren wohl abgekürzte Zahlwörter, und zwar sollen vorwiegend Buchstaben aus dem 2. Jahrhundert n. Chr. als Ziffern benützt worden sein. Die Null ist späteren Ursprungs; sicher nachgewiesen ist ihr Auftreten erst seit 400 n. Chr. Die Zahlenschreibung erfolgte, meist innerhalb des Rahmens der Stellungsregel, in verschiedener Weise. Eine Art, über welche *Aryabhatta* berichtet, stellte die Zahlen 1 bis 25 durch die 25 Konsonanten des Sanskritalphabets dar, die darauf folgenden Zehner (30, 40 . . . . 100) durch Halbvokale und Zischlaute. Eine Reihe von Vokalen und Diphthongen bildete Multiplikatoren aus Potenzen von 10; so wird *ga* = 3, *gi* = 300, *gu* = 30 000, *gau* = $3 \cdot 10^{16}$ gesetzt[16]). Hier findet das Positionssystem keine Verwendung, wohl aber bei

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 10. November 1887.

zwei anderen Verfahren der Zahlenschreibung, welche den Rechnern des südlichen Indiens angehören. Beide Darstellungen zeichnen sich dadurch aus, dass ein- und dieselbe Zahl auf mehrfach verschiedene Art zusammensetzbar ist. Es werden Rechnungsregeln im Gewand leichter Dichtung dem Gedächtnis zugänglicher und behältlicher. Das war für die indischen Mathematiker um so wichtiger, als sie schriftliche Zahlenarbeit möglichst zu vermeiden suchten. Die eine Darstellungsweise bestand in ihren Grundzügen darin, dass das Alphabet in Gruppen zu je neun Zeichen die Zahlen von 1 bis 9 mehrfach vertrat, wobei gewisse Vokale die Nullen vorstellten. Würde man etwa diesem Verfahren gemäss im deutschen Alphabet die Zahlen 1 bis 9 durch die Konsonanten b, c, . . . z bezeichnen, so dass nach zweimaligem Durchzählen z = 2 den Schluss bildete, wäre ferner die Null durch jeden Vokal oder jede Vokalverknüpfung vertreten, so könnte die Zahl 50501 durch »sagen« oder »siegen« und noch durch einige andere Wörter im Texte eingeführt werden. — Die andere Art der Zahlendarstellung benützt typische Wörter und verbindet sie nach dem Stellungssystem. Es war *abdhi* (eines der 4 Meere) = 4, *sûrya* (die Sonne mit ihren 12 Wohnungen) = 12, *açvin* (die beiden Söhne der Sonne) = 2. Die Zusammensetzung *abdhisûryâçvinas* bedeutete die Zahl 2124 [16]).

Der Sanskrit-Zahlensprache eigentümlich sind besondere Wörter für die Vervielfachung sehr grosser Zahlen. *Arbuda* bezeichnet 100 Millionen, *padma* 10 000 Millionen; daraus entsteht *mahârbuda* = 1000 Millionen, *mahâpadma* = 100 000 Millionen. Eigens gebildete Wörter für grosse Zahlen gehen bis 10^{17} und sogar noch weiter. Die ungemeine Ausdehnung des dekadischen Zahlensystems im Sanskrit streift an eine gewisse Zahlenspielerei, eine Sucht, das Unendlichgrosse zu erfassen. Von diesem Bestreben, das Unendliche in den Bereich der Zahlenanschauung und -Darstellung hereinzuzwingen, finden

sich auch Spuren bei den Babyloniern und Griechen. Es mag diese Erscheinung in mystisch-religiösen Vorstellungen oder philosophischen Spekulationen ihre Erklärung finden.

Die altchinesischen Zahlzeichen beschränkten sich auf eine ziemlich geringe Anzahl von Grundelementen, welche in ein vollkommen ausgebildetes Zehnersystem eingeordnet wurden. Dabei fand die Vereinigung bald durch Addition, bald durch Multiplikation statt. Es war [16]) sān = 3, chĕ = 10; chĕ san bedeutete 13, sān chĕ aber 30. In späterer Zeit entstanden durch fremdländischen Einfluss zwei neue Arten der Zahlendarstellung, deren Ziffern Aehnlichkeit mit den altchinesischen Zeichen aufweisen. Die aus ihnen gebildeten Zahlen werden jedoch nicht von oben nach unten, sondern wie bei den Indern von links nach rechts geschrieben, mit der höchsten Rangstufe beginnend. Die eine Art, die Kaufmannsziffern umfassend, findet sich nie gedruckt, sondern nur in Schriftstücken geschäftlicher Natur. Gewöhnlich stehen in zwei Zeilen übereinander geordnet die Rang- und Wertziffern, wenn nötig, mit einer Null in Gestalt eines kleinen Kreises. In dieser Bezeichnung ist $||$ = 2, $\times = 4$, $\perp = 6$, $+ = 10$, $\hbar = 10\,000$, $\circ = 0$, und daher

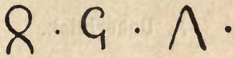
$$\begin{matrix} || & & & \times & \\ \hbar & \circ & \circ & + & \perp \end{matrix} = 20\,046.$$

Bei den Arabern, diesen gewandten Uebermittlern morgenländischer und griechischer Rechenkunst an die westlichen Völker, reicht die Sitte, Zahlwörter auszuschreiben, bis in den Anfang des 11. Jahrhunderts herein. Jedoch hatten sich schon verhältnismässig frühzeitig aus den Zahlwörtern Abkürzungen gebildet: die Dîwânîziffern. Im achten Jahrhundert lernten die Araber das Zahlensystem der Inder und ihre Ziffern mit Einschluss der Null kennen. Aus diesen Ziffern entstanden unter den Westarabern, die sich auch mit ihrer ganzen Litteratur in einen gewissen Gegensatz gegen die östlichen Stammesverwandten setzten, die Gobarziffern (Staubziffern) als Varianten. Diese heut-

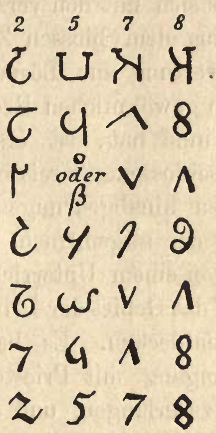
zutage bei den Arabern selbst völlig vergessenen Gobarziffern sind die Stammeltern der modernen Ziffern [47], welche sich zunächst aus den Apices des frühen Mittelalters ableiten lassen. Die Apices, deren man sich beim Abakusrechnen bediente, kommen in den westeuropäischen Handschriften vom 11. und 12. Jahrhundert in vielfältigen Variationen vor, nachdem sie durch *Gerbert* und *Gerhard von Cremona* eine weitere Verbreitung erlangt hatten.

Das Rechnen der westlichen Völker, durch Klosterschulen vom 9. Jahrhundert an in mässigem Umfang gepflegt, fand ausserhalb des Abakus stets mit römischen Ziffern, also ohne Verwendung eines Zeichens für die Null statt. Bis ums Jahr 1500 hiessen die römischen Bezeichnungen geradezu deutsche Ziffern, im Gegensatz zu den damals noch seltener angewandten Zeichen arabisch-indischen Ursprungs, welche eine Null (arabisch *as-sifr*, Sanskrit *sunya* das Leere) besassen. Letztere hiessen Ziffern. Erst vom 15. Jahrhundert an treten in Deutschland diese arabisch-indischen Ziffern häufiger an Denkmälern und Kirchen auf, sind aber zu jener Zeit noch nicht Volkseigentum geworden [116]. Jedoch soll der älteste Grabstein mit arabischen Ziffern (in Katharein bei Troppau) schon aus dem Jahr 1007 stammen; sicher bekannt sind derartige Grabdenkmäler in Pforzheim von 1371, in Ulm von 1388. Einen häufigen und freien Gebrauch der Null im 13. Jahrhundert zeigen Tafeln für die Berechnung der Londoner Hafenzeit und der nächtlichen Mondscheindauer [42]. Im Jahr 1471 erschien in Köln ein Werk *Petrarkas* mit Numerierung durch indische Ziffern am Kopf der Blätter; 1482 wurde das erste deutsche Rechenbuch mit derselben Zahlenbezeichnung in Bamberg gedruckt. Ausser der im grossen und ganzen heute noch gewöhnlichen Ziffernform, die schon in einem Rechenbuch von 1489 ausschliesslich auftritt, sind in der Zeit des Kampfes zwischen römischer und

indischer Zahlenschreibung auf deutschem Gebiet für 4, 5, 7 folgende Formen gebräuchlich gewesen:



Die Abstammung der modernen Ziffern illustrieren untenstehende Beispiele, welche in dieser Reihenfolge dem Sanskrit,



den Apices, dem Ostarabischen, den westarabischen Gobarziffern, den Ziffern des 11., 13. und 16. Jahrhunderts entnommen sind[16][47]).

Mit dem 16. Jahrhundert erst hatte die indische Stellungsarithmetik und ihre Zahlenbezeichnung bei allen Kulturvölkern des Westens völligen Eingang gefunden. Erfüllt war damit eine der unerlässlichen Vorbedingungen für die segensreiche Entfaltung der gemeinen Arithmetik im Schulunterricht weiter Volkskreise, im Dienste des Handels und Verkehrs.

II. Gemeines Rechnen.

A. Ueberblick.

Die einfachsten Zahlwörter und das elementare Zählen sind zu allen Zeiten Gemeingut des Volkes gewesen. Ganz anders aber verhält es sich mit den verschiedenen Rechnungsverfahren, die sich aus dem blossen Zählen ableiten lassen, und mit deren Verwertung zur Lösung zusammengesetzter Aufgaben. Was vom gewöhnlichen Rechnen heutzutage jedes Kind mit Sicherheit inne hat, ist erst im Verlauf langer Perioden aus dem geschlossenen Kreis besonderer Kasten oder kleinerer Gemeinwesen hinabgedrungen ins Volk, um hier einen wichtigen Teil der allgemeinen Bildung auszumachen. Bei den Alten war von einem Unterricht der Jugend, soweit er sich nicht etwa auf das Gebiet der Leibesübungen erstreckte, fast gar nichts zu entdecken. Es bemühte sich nur das reifere Alter, im Umgang mit Priestern oder Philosophen eine höhere Bildung zu erlangen, und diese bestand zum Teil gerade aus dem grundlegenden Wissen der heutigen Volksschulen: man lernte lesen, schreiben, rechnen.

An den Beginn der ersten Periode in der historischen Entwicklung der gemeinen Arithmetik treten die Aegypter. Ihnen legen griechische Schriftsteller die Erfindung der Feldmessung, der Sternkunde, der Arithmetik bei. Ihrer Litteratur gehört auch das älteste Rechenbuch an, das des *Ahmes*, welches in ganzen und gebrochenen Zahlen operieren lehrt. Die Babylonier verwerten ein Sexagesimalsystem in ihrer Stellungsarithmetik, welch letztere auch den Zwecken einer religiösen Zahlensymbolik dienen muss. Das gewöhnliche Rechnen der Griechen hatte, namentlich in der ältesten Zeit, einen mässigen Umfang, bis sich durch die Thätigkeit ihrer philosophischen Schulen eine eigentliche Mathematik mit vorwiegend geometrischem Charakter ent-

wickelte. Trotzdem wurde rechnerische Ausbildung nicht gering geschätzt. Davon zeugt die Forderung *Platons* in seinem idealen Staatsleben, dass die Jugend im Lesen, Schreiben und Rechnen unterrichtet werden müsse.

Die Arithmetik des Römervolkes hatte eine rein praktische Richtung; ihrem Uebungsfeld gehörte eine Menge oft recht verwickelter Aufgaben aus Streitfällen über Fragen des Erbrechts, des Privatbesitzes und der Zinsentschädigung an. Das Bruchrechnen ist bei den Römern duodezimal. Ueber das älteste Rechnen der Inder können nur Vermutungen ausgesprochen werden. Dagegen ist die indische elementare Arithmetik seit Einführung des Stellungssystems aus Werken von Schriftstellern dieses Volkes selbst ziemlich genau bekannt. Die Mathematiker des indischen Volkes haben die Grundlagen der gewöhnlichen Rechnungsverfahren der Gegenwart ausgebildet. Der Einfluss ihrer Wissenschaft ist in der gleichfalls auf dem Zehnersystem fussenden chinesischen Arithmetik fühlbar, in noch viel höherem Masse aber bei den Arabern, die neben dem indischen Zifferrechnen zum Teil auch ein Kolumnenrechnen betrieben.

Die Zeit vom 8. bis zum Beginn des 15. Jahrhunderts bildet die zweite Periode. Es ist dies eine merkwürdige Uebergangsperiode, ein Zeitraum der Verpflanzung alter Methoden in neuen, fruchtbaren Boden, aber auch des Kampfes der erprobten indischen Rechnungsweisen gegen mittelalterlich schwerfällige und umständliche arithmetische Operationen. Anfangs konnte nur in Klöstern und Klosterschulen einiges arithmetisches Wissen, aus römischen Quellen geschöpft, entdeckt werden. Dann aber gingen neue Anregungen von den Arabern aus, so dass sich vom 11. bis 13. Jahrhundert der Gruppe der Abacisten mit ihren seltsamen komplementären Methoden eine Schule der Algorithmiker als Anhänger indischer Rechenkunst entgegenstellte.

Erst mit dem 15. Jahrhundert, der Zeit des

Eindringens in die griechischen Urschriften, der raschen Entwicklung der Astronomie, des Aufblühens der Künste und der Handelsbeziehungen, beginnt auch die dritte Periode in der Geschichte des gemeinen Rechnens. Schon im 13. Jahrhundert gab es neben den Dom- und Klosterschulen, welche sich nur um ihre religiösen und kirchlichen Bedürfnisse kümmerten, eigentliche Rechenschulen. Ihre Gründung ist auf die Bedürfnisse des lebhaften Verkehrs deutscher Städte mit italienischen Kaufleuten, die zugleich gewandte Rechner waren, zurückzuführen. Im 15. und 16. Jahrhundert erfuhr das Schulwesen durch den Humanismus und die Reformation eine wesentliche Förderung. Es wurden Lateinschulen, Schreibschulen, deutsche Schulen für Knaben, ja auch für Mädchen eingerichtet. In den Lateinschulen bekamen nur die obersten Klassen in einer Wochenstunde Rechenunterricht; man übte die 4 Species, die Bruchlehre und höchstens noch die Regeldetrie, was nicht als gar wenig erscheinen mag, wenn man bedenkt, dass auf den Universitäten jener Zeit im Rechnen häufig auch nicht viel weiter vorgeschritten wurde. In den Schreibschulen und deutschen Knabenschulen lernte man etwas Rechnen, Zahlenschreiben und Numerieren, namentlich den Unterschied »deutscher Zahlen« (in römischer Schrift) von den Zahlen in »Figuren« oder »Zyphern« (nach indischer Art). In den nur für die höheren Stände errichteten Mädchenschulen lernte man gar kein Rechnen. Tüchtige Kenntnisse im Rechnen konnten nur in den Rechenschulen erworben werden. Die berühmteste dieser Unterrichtsanstalten besass Nürnberg. In den Handelsstädten gab es Rechenmeister-Innungen, welche sich die Verbreitung arithmetischer Kenntnisse angelegen sein liessen. Aber auch die eigentlichen Mathematiker und Astronomen arbeiteten mit an der Ausbildung der Methoden für das gemeine Rechnen. Trotz dieser Beihilfe hervorragender Männer war es im 16. Jahrhundert doch noch nicht zur

Aufstellung einer Theorie des Rechenunterrichts gekommen. Was vorgemacht war, musste nachgemacht werden. In den Rechenbüchern fanden sich nur Regeln und Beispiele, aber fast nie Begründungen oder Herleitungen.

Das 17. Jahrhundert führte keine wesentliche Aenderung dieser Zustände herbei. Schulen bestanden wie früher, wo sie nicht durch die Schrecken des dreissigjährigen Kriegs verschlungen worden waren. Die Rechenmeister schrieben ihre Rechenbücher, erfanden wohl auch Rechenmaschinen, um ihren Schülern eine Erleichterung zu verschaffen, oder sie verfassten arithmetische Unterhaltungsschriften und Gedichte. Eine Probe hievon aus *Tobias Beutels* Arithmetica, welche 1693 in 7. Auflage erschien, ist folgende[116]:

»Numerieren lehrt im Rechen
Zahlen schreiben und aussprechen.« —
»In Summen bringen heisst addieren,
Dies muss das Wörtlein Und vollführen.« —
»Wie eine Hand an uns die andre wäschet rein
Kann eine Species der andern Probe seyn.« —

Eine Vervollkommnung erfuhr die kaufmännische Arithmetik durch die Ausbildung der Wechsel- und Rabattrechnung, und das Multiplizieren durch ein abgekürztes Verfahren. Die Unterrichtsmethode war aber die gleiche geblieben, d. h. der Schüler rechnete nach Regeln, ohne dass der Versuch gemacht wurde, ihm das Wesen derselben auseinanderzusetzen.

Das 18. Jahrhundert brachte als erste und wichtigste Neuerung die gesetzliche Regelung der Schulverhältnisse durch besondere Schulordnungen und die Errichtung von Lehrer-Seminarien (das erste 1732 in Stettin verbunden mit dem Waisenhaus). Als Reorganisatoren der höheren Schulen traten die Pietisten und Philantropen auf; erstere gründeten Realschulen (die älteste 1738 in Halle errichtet) und höhere Bürgerschulen; letztere suchten in ihren »Schulen der Aufklärung« durch Verbesserung der Methode Weltbürger von möglichst allgemeiner Bildung zu erziehen.

Die arithmetischen Uebungsbücher dieser Zeit enthalten eine Vereinfachung der Division (das Unterwärts- oder Untersichdividieren), sowie eine ausgiebigere Verwendung des Kettensatzes und der Dezimalbrüche. Daneben entstehen auch Handbücher der Methode, deren Zahl sich im 19. Jahrhundert rasch mehrt. Namentlich ist es der Elementarunterricht, der darin berücksichtigt wird. Nach *Pestalozzi* (1803) ist die Grundlage des Rechnens die Anschauung, nach *Grube* (1842) die allseitige Zahlbehandlung, nach *Tanck* und *Knilling* (1884) das Zählen. Bei *Pestalozzi's* Methode wird »der dekadische Aufbau unseres Zahlensystems, der doch so viele Rechnungsvorteile in sich schliesst, gar nicht berührt. Addition, Subtraktion und Division treten nicht als gesonderte Uebungen auf, das sprachliche Beiwerk erstickt fast die Hauptsache in den Sätzen, nämlich die arithmetische Wahrheit«[116]). *Grube* hat eigentlich aus *Pestalozzi's* Aufstellungen nur die äussersten Folgerungen gezogen. Sein Stufengang »ist in mehrfacher Hinsicht mangelhaft, seine Uebungen sind zweckwidrig«[116]). Für das Zählprinzip spricht die geschichtliche Entwicklung der Arithmetik: das erste Rechnen war zu jeder Zeit ein Anschauen und Zählen.

B. Erste Periode.

Das Rechnen der ältesten Völker bis zu den Arabern.

1. Das Rechnen mit ganzen Zahlen.

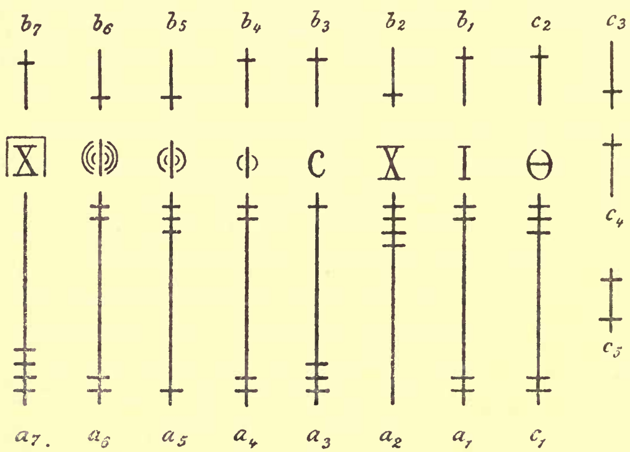
Wenn von einem nicht ganz sicher zu erweisenden Fingerrechnen abgesehen wird, so war das altägyptische Rechnen nach einem Bericht *Herodots* ein Operieren mit Steinchen auf einem Rechenbrett, dessen Reihen senkrecht gegen den Rechner standen. Vielleicht benützten auch die Babylonier ein ähnliches Hilfsmittel. Im gewöhnlichen Rechnen der letzteren herrscht wie bei den Aegyptern das dekadische System; nebenbei findet sich aber auch, namentlich im Bruch-

rechnen, ein Sexagesimalsystem. Es entstand wohl ohne Zweifel bei der Verarbeitung astronomischer Beobachtungen der babylonischen Priester [16]). Die Länge des Jahres von 360 Tagen gab Veranlassung zur Teilung des Kreises in 360 gleiche Teile, deren einer den scheinbaren täglichen Weg der Sonne an der Himmelskugel darstellen sollte. Wenn daneben die Konstruktion des regulären Sechsecks bekannt war, so lag es nahe, je 60 dieser Teile wieder als Einheit zu fassen. Die Zahl 60 hiess Soss. Zahlen des sexagesimalen Systems wurden wieder nach der dekadischen Regel vervielfacht; so gab es ein Ner = 600, ein Sar = 3600. Das von babylonischen Priestern aufgestellte Sexagesimalsystem trat auch in ihre religiösen Spekulationen ein, indem jeder ihrer Götter seiner Rangordnung entsprechend durch eine der Zahlen 1 bis 60 bezeichnet wurde. Vielleicht teilten die Babylonier auch ihren Tag in 60 gleiche Teile, wie dies für den Vedakalender der alten Inder nachgewiesen ist.

Die griechische Elementarmathematik benützte jedenfalls schon zur Zeit des *Aristophanes* (420 v. Chr.) das Fingerrechnen und das Operieren auf einem Rechenbrett in den Fällen des gewöhnlichen Lebens. Ueber das Fingerrechnen berichtet *Nikolaus Rhabda* von Smyrna (im 14. Jahrhundert). Vom Kleinfinger der Linken bis zum Kleinfinger der Rechten waren 3 Finger zur Einerrechnung, 2 weitere zur Zehner-, die 2 nächsten zur Hunderter- und die 3 letzten zur Tausenderdarstellung bestimmt. Auf dem Rechenbrett, dem Abax (ἄβαξ; Staubbrett), dessen Kolumnen gegen den Darsteller senkrecht standen, wurde mit Steinchen operiert, welche in verschiedenen Reihen verschiedenen Stellungswert besassen. Die Multiplikation erfolgte so, dass in jedem Faktor mit der höchsten Rangstufe begonnen und aus den Teilprodukten die Summe gebildet wurde. Man rechnete also (in moderner Darstellung):

$$
\begin{array}{rrrrr}
126.237 = & (100 + 20 + 6) & (200 + 30 + 7) & & \\
= & 20\,000 + & 3000 & + 700 & \\
+ & 4\,000 + & 600 & + 140 & \\
+ & 1\,200 + & 180 & + \;\;42 & \\
= & 29\,862. & & &
\end{array}
$$

Das Fingerrechnen der Römer reicht nach *Plinius* zurück bis auf König *Numa;* dieser liess ein Janusstandbild ausführen, dessen Finger die Zahl der Tage eines Jahres (355) darstellten. Damit zusammenhängend nennt *Boëthius* die Zahlen 1 bis 9 Fingerzahlen, 10, 20, 30 ... Gelenkzahlen, 11, 12, ... 19, 21, 22, ... 29, ... zusammengesetzte Zahlen. Beim elementaren Unterricht benützten die Römer den Abakus, ein gewöhnlich mit Staub bedecktes Brett, auf welchem man Figuren zeichnen, Kolumnen ziehen und mit Steinchen hantieren konnte. Oder es wurde der Abakus, wenn er nur zum Rechnen bestimmt war, aus Metall gefertigt und mit Einschnitten versehen (in der untenstehenden schematischen Zeichnung die vertikalen Linien), in welchen beliebige Marken (die Querstriche) verschiebbar waren.



Die Kolumnen $a_1 \ldots a_7$, $b_1 \ldots b_7$ bilden ein System von 1 bis 1000000; auf einer Kolumne a befinden sich 4 Marken, auf einer b liegt nur eine Marke. Jede der 4 Marken bedeutet eine Einheit, die obere einzelne Marke aber 5 Einheiten des betreffenden Rangs. Ferner ist eine Marke auf $c_1 = \frac{1}{12}$, auf $c_2 = \frac{6}{12}$, auf $c_3 = \frac{1}{24}$, auf $c_4 = \frac{1}{48}$, auf $c_5 = \frac{1}{72}$ (bezogen auf die Einteilung des As). Der Abakus der Figur stellt die Zahl $782192 + \frac{3}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{72} = 782192\frac{11}{36}$ dar. Dieser Abakus reichte zur Ausrechnung der Resultate einfacher Aufgaben aus. Daneben wurde auch das Einmaleins geübt. Für grössere Multiplikationen gab es Tabellen; eine solche ist durch *Victorius* (um 450 n. Chr.) bekannt geworden. Aus *Boëthius*, der die Abakusmarken Apices nennt, erfährt man auch etwas über die Multiplikation und Division. Von diesen Operationen wurde die erstere wahrscheinlich, die letztere sicher komplementär ausgeführt. Bei *Boëthius* heisst Differentia die Ergänzung des Divisors zum nächsten vollen Zehner oder Hunderter; die Differentia ist also für die Divisoren 7, 84, 213 bezüglich 3, 6, 87. Das wesentliche dieser komplementären Division ersieht man aus folgendem in moderner Weise dargestellten Beispiel:

$$\frac{257}{14} = \frac{257}{20-6} = 10 + \frac{60+57}{20-6} = 10 + \frac{117}{20-6}$$

$$\frac{117}{20-6} = 5 + \frac{30+17}{20-6} = 5 + \frac{47}{20-6}$$

$$\frac{47}{20-6} = 2 + \frac{12+7}{20-6} = 2 + \frac{19}{20-6}$$

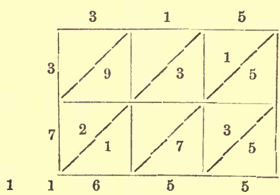
$$\frac{19}{14} = 1 + \frac{5}{14}$$

$$\frac{257}{14} = 18 + \frac{5}{14}.$$

Dem Abakus der Römer ähnelt der *Swân pân* der Chinesen. Diese Rechenmaschine besteht aus einem Rahmen mit gewöhnlich 10 eingesetzten Drähten. Ein Querdraht

zerschneidet jeden der 10 Drähte in 2 ungleiche Stücke; jedem kleineren Stück sind 2, jedem grösseren 5 Kugeln aufgereiht. — Die chinesischen Rechenbücher geben keine Vorschriften für das Zuzählen und Abziehen, wohl aber für das Vervielfachen, das wie bei den Griechen mit der höchsten Ordnung beginnt, und für das Teilen, welches in der Gestalt einer wiederholten Subtraktion auftritt.

Das Rechnen der Inder nach Einführung der Stellungsarithmetik besitzt schon eine Reihe zweckmässiger Regeln für die Ausführung der Grundoperationen. Die Subtraktion erfolgt bei kleinerer Minuandenziffer durch Entlehnen und durch Zuzählen (ähnlich wie bei der sogenannten österreichischen Subtraktion). Bei der Multiplikation, für welche mehrere Ausführungsarten gelten, wird in einigen Fällen das Produkt durch Zerlegung des Multiplikators in Faktoren und nachherige Addition der Teilprodukte hergestellt. In anderen Fällen ist ein schematisches Verfahren eingeschlagen, dessen Eigenart das Beispiel 315 . 37 = 11 655 zeigt. Das Resultat dieser Multiplikation ergibt sich durch Addition der innerhalb des Rechtecks sich befindenden Ziffern in der Richtung der schrägen Linien.



Ueber die Division finden sich nur wenige Aufzeichnungen. Wahrscheinlich wurden aber keine komplementären Methoden angewendet.

Ueber arabisches Rechnen berichtet als ältester Schriftsteller *Alchwarizmî*. Die Anlehnung an indisches Rechnen tritt ganz klar hervor. Es werden 6 Operationen gelehrt. Das Addieren und Subtrahieren fängt bei

den Einheiten der höchsten Rangstufe, also links, an; das Halbieren beginnt rechts, das Verdoppeln wieder links. Die Multiplikation erfolgt nach dem Verfahren, welches die Araber Tatstha (es bleibt stehen) nannten [16]. Die Teilprodukte werden, mit der höchsten Stelle des Multiplikandus beginnend, über die zugehörige Ziffer des letzteren geschrieben und jede Ziffer des Produkts, zu welcher noch Einheiten eines späteren Teilproduktes treten (im Sand oder Staub) ausgewischt und verbessert, so dass nach Vollendung der Rechnung das Ergebnis über dem Multiplikanden steht. In der Division, die nie komplementär ausgeführt wird, steht der Divisor unterhalb des Dividenden und rückt während der Rechnung nach rechts vor. Quotient und Rest erscheinen über dem Divisor in $\frac{461}{16} = 28\frac{13}{16}$, etwa folgendermassen [16]:

$$
\begin{array}{l}
\;\;13 \\
14 \\
28 \\
461 \\
16 \\
\;\;16
\end{array}
$$

Wie *Alchwarizmî* rechnet auch *Alnasawî*; durch ihre Methoden ist die elementare Arithmetik der Ostaraber charakterisiert.

Im Wesen damit übereinstimmend, in der Ausführung dagegen mehr oder weniger abweichend, rechneten die Westaraber. *Ibn Albannâ* lehrt ausser dem indischen Ziffer-rechnen eine Art Kolumnenrechnen [16]. Von rechts nach links gehend werden die Kolumnen in Gruppen zu je dreien zusammengefasst; eine solche Gruppe heisst *takarrur*; die Anzahl aller zum Einschreiben einer Zahl nötigen Kolumnen ist der *mukarrar*. Sonach ist für die Zahl 3 849 922 der *takarrur* = 2, der *mukarrar* = 7. — Von *Alkalsâdî* ist eine Schrift bekannt: »Aufhebung der Schleier der Wissenschaft des Gubâr« [16]. Die ursprüngliche Bedeutung von *Gubâr* = Staub ist hier übergegangen in die des schriftlichen

Rechnens mit Ziffern. Besonders eigentümlich ist, dass beim Addieren, Subtrahieren (= *tarh*, *taraha* = wegwerfen) und Multiplizieren die Resultate über die der Operation unterworfenen Zahlen geschrieben werden, also wie in folgenden Beispielen:

$$193 + 45 = 238:\ \begin{array}{c}238\\ \hline 193\\ 45\\ 1\end{array};\ \text{oder}\ 238 - 193 = 45:\ \begin{array}{c}45\\ \hline 238\\ 193\\ 1\end{array}.$$

Multiplikationsregeln finden sich bei *Alkalsadî* mehrere, unter ihnen eine mit fortrückendem Multiplikator. Bei der Division steht das Resultat unten.

$$\text{I. Beispiel:}\quad 7 . 143 = 1001:\ \begin{array}{r}1001\\ \hline 21\\ 28\\ 7\\ \hline 143\\ 777\end{array}\qquad\Bigg|\qquad \text{II. Beispiel:}\quad \frac{1001}{7} = 143:\ \begin{array}{r}32\\ 1001\\ 777\\ \hline 143\end{array}$$

2. Das Rechnen mit Brüchen.

Ahmes gibt in seinem Rechenbuch eine grosse Anzahl von Beispielen, welche die Art, wie die Aegypter mit gebrochenen Zahlen rechneten, übersehen lassen. Durchaus wird mit Stammbrüchen gerechnet, d. h. mit Brüchen, deren Zähler 1 ist. Für diesen Zähler findet sich daher ein besonderes Zeichen, in der Hieroglyphenschrift , in der hieratischen Schrift ein Punkt, so dass in letzterer ein Stammbruch durch seinen Nenner mit darübergesetztem Punkt dargestellt wird. Ausserdem finden sich noch für $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ die Hieroglyphen und ; in der hieratischen Schrift entsprechen den Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ gleichfalls besondere Zeichen. — Die erste Aufgabe, die *Ahmes* löst, besteht darin, einen Bruch in Stammbrüche zu zerlegen; er findet z. B. $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$, $\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$. Diese Zerlegung, eigentlich eine unbestimmte Aufgabe, wird von

Ahmes nicht allgemein, sondern nur in besonderen Fällen gelöst.

Die Brüche der Babylonier gehören sämtlich in das sexagesimale System; sie waren dadurch von vornherein gleichnamig und man konnte mit ihnen wie mit ganzen Zahlen rechnen. In der schriftlichen Darstellung setzte man nur den mit einem besonderen Zeichen versehenen Zähler. — Die Griechen schrieben einen Bruch so, dass auf den einmal rechts oben gestrichenen Zähler in derselben Linie der zweimal gestrichene Nenner zweimal folgte, also $\iota\zeta'\ \kappa\alpha''\ \kappa\alpha'' = \frac{17}{21}$. Bei Stammbrüchen blieb der Zähler weg, der Nenner wurde nur einmal gesetzt: $\delta'' = \frac{1}{4}$. Die zu addierenden Stammbrüche stehen unmittelbar neben einander[16]: $\zeta''\ \kappa\eta''\ \rho\iota\beta''\sigma\kappa\delta'' = \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224} = \frac{43}{224}$. Beim eigentlichen Rechnen machte man von den Stammbrüchen einen weitreichenden Gebrauch, in späterer Zeit auch von den Sexagesimalbrüchen (bei Winkelberechnungen). Von einem eigentlichen Bruchstrich ist aber nirgends die Rede; und da, wo ein solcher aufzutreten scheint, bezeichnet er nur das Resultat einer Addition, nicht aber ein Teilen*).

Die Bruchrechnung der Römer bietet ein Beispiel für die Benützung des Duodezimalsystems. Unter den Brüchen (Minutien) hatten $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots \frac{11}{12}$ besondere Namen und Zeichen. Die ausschliessliche Verwendung dieser Duodezimalbrüche[47]) rührte davon her, dass der As, eine Kupfermünze von 1 Pfund Gewicht, in 12 Unzen eingeteilt wurde. Die Unze hatte 4 Sicilici und 24 Scripuli. Es war $1 =$ as, $\frac{1}{2} =$ semis, $\frac{1}{3} =$ triens, $\frac{1}{4} =$ quadrans etc. Besondere Namen (ausser den Zwölfteln) hatten noch die Brüche $\frac{1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{1}{72}, \frac{1}{144}, \frac{1}{288}$. Die Addition und Subtraktion solcher Brüche war verhältnismässig einfach, die Multiplikation derselben aber sehr umständlich. Der grösste Nachteil dieses Systems

---

*) Tannery in Bibl. Math. 1886.

bestand darin, dass alle Teilungen, die nicht in dieses Duodezimalsystem passten, entweder nur höchst mühsam oder aber nur ungenau durch Minutien dargestellt werden konnten.

In den Rechnungen der Inder kommen gleichfalls Brüche vor, und zwar Stammbrüche und abgeleitete Brüche. Der Nenner steht unterhalb des Zählers, ist aber von diesem nicht durch einen Strich getrennt. Die indischen Astronomen rechneten mit Vorliebe in Sexagesimalbrüchen. Im Rechnen der Araber gibt *Alchwarizmî* für Halbe, Drittel, ... Neuntel besondere Wörter (aussprechbare Brüche). Alle Brüche mit Nennern, welche den Zahlen 2, 3, ... 9 ganz fremd sind, heissen stumme Brüche; sie werden durch Umschreibung ausgedrückt, z. B. $\frac{2}{17}$ als 2 Teile von 17 Teilen. *Alnasawî* schreibt gemischte Zahlen in 3 Zeilen unter einander, zu oberst die Ganzen, darunter den Zähler und unter diesen den Nenner. Für astronomische Rechnungen wurden auch hier ausschliesslich Brüche des Sexagesimalsystems benutzt.

3. Angewandtes Rechnen.

Das praktische Rechnen der alten Völker umfasste ausser den gewöhnlichsten Fällen des täglichen Lebens auch astronomische und geometrische Aufgaben. Von den letzteren soll hier abgesehen werden, weil sie anderweitig Erwähnung finden. — In *Ahmes* sind Gesellschaftsrechnungen aufgeführt, auch einfachste Reihen zusammengerechnet. *Theon von Alexandrien* lehrt die Quadratwurzel aus einer Anzahl von Winkelgraden unter Anwendung der Sexagesimalbrüche und des Gnomons annähernd bestimmen. Den Römer beschäftigten Zins- und Erbrechnungen am meisten. Die Inder haben schon die Methode des falschen Ansatzes (der Regula falsi) und der Regeldetri ausgebildet und beschäftigen sich daneben noch mit Mischungs-, Brunnen- und Reihenaufgaben, welche von den Arabern weiter ausgebildet werden.

Neben dem praktischen Rechnen hergehend zeigen sich schon wiederholt Spuren zahlentheoretischer Betrachtungen. Die Aegypter waren imstande, die Teilbarkeit einer Zahl durch 2 zu erkennen. Die Pythagoräer unterschieden gerade und ungerade, befreundete, vollkommene, überschiessende und mangelhafte Zahlen[16]. Von 2 befreundeten Zahlen musste jede gleich der Summe der aliquoten Teile der andern sein ($220 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$, und $284 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$). Eine vollkommene Zahl war gleich der Summe ihrer aliquoten Teile ($6 = 1 + 2 + 3$). War die Summe der aliquoten Teile grösser oder kleiner als die Zahl selbst, so nannte man letztere überschiessend oder mangelhaft ($8 > 1 + 2 + 4$; $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$). Ausserdem hat *Euklid* über Teilbarkeit, über das grösste gemeinschaftliche Mass und das kleinste Gemeinvielfache von seinem geometrischen Standpunkt ausgehend gründliche Untersuchungen angestellt. Den Indern war die Neunerprobe und das Kettenbruchverfahren bekannt; von ihnen ging dieses Wissen zu den Arabern über. So unscheinbar diese Anfänge in ihrem antiken Gewande sein mögen, so tragen sie doch schon den Keim der grossartigen Entwicklung in sich, den das 19. Jahrhundert der Zahlentheorie gebracht hat.

C. Zweite Periode. Vom 8. bis 14. Jahrhundert.

1. Das Rechnen mit ganzen Zahlen.

In den Klosterschulen, den Episkopal- und Privatschulen der Merovinger und Karolinger Zeit waren es wohl ausschliesslich Mönche, welche den Unterricht leiteten. Die eigentlichen Klosterschulen hatten häufig nur geringe Bedeutung für die Förderung mathematischen Wissens; dagegen scheinen die bischöflichen und Privatschulen, letztere nach italienischem Muster eingerichtet, sehr segensreich gewirkt zu haben[42]. Der erste, welcher von arithmetischem Wissen der Mönche

etwas ahnen lässt, ist *Isidorus von Sevilla.* Dieser Klostergelehrte beschränkt sich darauf, Vermutungen über die Abstammung der römischen Zahlwörter anzustellen, und spricht von der Art des Rechnens seiner Zeitgenossen gar nicht. Ebenso verkündet *Beda der Ehrwürdige* nur Ausführliches über das Fingerrechnen; er lehrt die Zahlen mit Hilfe der Finger darstellen, von der Linken zur Rechten fortschreitend, und setzt dabei eine gewisse Bekanntschaft mit dem Fingerrechnen schon voraus, indem er als Vorgänger *Plutarch, Macrobius, Juvenal, Quintilian* nennt. Dieser »Calculus digitalis«, im Orient und Occident nach der völlig gleichen Art auftretend, hat wohl bei den kirchlichen Festrechnungen der Priester jener Zeit eine Hauptrolle gespielt, wenigstens werden Computus digitalis und Computus ecclesiasticus häufig in demselben Sinne gebraucht [42]).

Ueber die eigentlichen Grundoperationen äussert sich *Beda* nicht. *Alkuin* hält zwar die damals schon unter den Gelehrten allgemein verbreitete Einteilung der Wissenschaften in ein Trivium (Grammatik, Dialektik, Rhetorik) und ein Quadrivium (Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie) für etwas sehr wichtiges, rechnet aber wie *Beda* und *Hrabanus Maurus* eifrig mit Fingern oder mit römisch geschriebenen Zahlen in sehr schwerfälliger Art [42]). Erst *Gerbert* gibt in seiner »Regula de abaco computi« eigentliche Rechenvorschriften, indem er sich dabei an den arithmetischen Teil des *Boëthius* anlehnt. Was er lehrt, ist ein reines Abakusrechnen, das durch sein Ansehen weite Verbreitung erlangt. *Gerberts* Abakus, genau beschrieben von seinem Schüler *Bernelinus*, war eine Tafel, welche für die Entwerfung geometrischer Figuren mit blauem Sand bestreut, zum Rechnen aber in 30 Columnen eingeteilt wurde, von denen 3 zum Bruchrechnen bestimmt waren. Die übrigen 27 Kolumnen waren von rechts nach links in Gruppen zu je dreien abgeteilt; am Kopf jeder Gruppe stand ebenfalls von rechts nach links S (singularis),

D (decem), C (centum). Die benützten Zahlzeichen, die sogenannten Apices, sind Zeichen für 1 bis 9, aber ohne Null. Beim Rechnen auf diesem Abakus konnten die Zwischenoperationen verwischt werden, so dass schliesslich nur das Resultat stehen blieb; oder man operierte mit Marken, welche der Schildmacher gefertigt hatte. Die Ausführung der Grundoperationen erfolgte meist durch Ergänzen, und hiefür ist besonders die Division charakteristisch. Die Bildung des Quotienten $\frac{199}{6} = 33\frac{1}{6}$ mag diese komplementäre Division erläutern.

C	D	S
		6
		4
1	9	9
1.	9.	9.
	4.	
	1.	6.
1.		4.
	4.	9.
	1.	6.
		4.
	1.	9.
		4.
	1.	3.
		4.
		7.
		1
	1.	4.
	1.	1.
		4.
		1.
		1.
		1.
		1.
	3	3

C	D	S
		6
1	9	9
1.	9.	9.
		1
	3	3

	10 — 4
1 9 9	10
99 + 40	
139	10
79	7
9 + 28	
37	3
19	1
13	1
7	1
1	33

In dem gegebenen Beispiel steht links die vollständige Ausführung der komplementären Division; die im Fortgang der Rechnung auszuwischenden Ziffern sind durch einen rechts beigesetzten Punkt be-

zeichnet. — Rechts findet sich die Abakusdivision ohne Bildung der Differenz im Divisor, darunter die Andeutung der komplementären Division in moderner Darstellung.

Im 10. und 11. Jahrhundert gab es eine ganze Reihe von Schriftstellern meist geistlichen Stands über das Abakusrechnen mit den Apices, aber ohne die Null und ohne die indisch-arabischen Methoden, wobei die Apices an den Abakus selbst oder an die Darstellung einziffriger Zahlen gebunden waren, während im fortlaufenden Text namentlich bei mehrziffrigen Zahlen römische Zahlzeichen stehen. Der Gegensatz zwischen Apices- und römischer Bezeichnung ist so auffallend, dass z. B. *Odo* schreibt: »Mag man 5 mal 7 oder 7 mal 5 nehmen, so entsteht XXXV« (die 5 und 7 in Apices geschrieben)[16].

Zur Zeit des Abakusrechnens kam die eigentümliche Gewohnheit auf, gewisse im römischen Zeichensysteme fehlende Zahlgrössen durch besondere Zeichen auszudrücken, und dieser Gebrauch zog sich weit ins Mittelalter hinein. So findet man z. B. in den Greifswalder Stadtbüchern 250 stets mit  aufgezeichnet[42]).

Die Abacisten mit ihren wundersamen Divisionsmethoden beherrschten das abendländische Rechnen bis zum Beginn des 12. Jahrhunderts vollständig. Dann aber vollzog sich ein völliger Umschlag. Der Abakus, der Erbe des Computus, d. h. der altrömischen Rechnungsweise und Zahlenschreibung sollte dem Algorithmus mit seiner bewussten Anwendung der Null und den einfacheren Rechnungsweisen, allerdings nicht ohne längeren Kampf, weichen[42]). Man ging bei den Westarabern in die Schule. Unter den Namen solcher, welche arabisches Rechnen verbreiteten, ragt der *Gerhards von Cremona* besonders hervor, weil er eine Reihe von Schriften griechischer Autoren und dazu noch solche arabischer Originalschriftsteller ins Lateinische übertrug. Es bildete sich nun die Schule der Algorithmiker, welche im Gegensatz zu den Abacisten keine komplementäre Division, dafür aber das indische Stel-

lungssystem mit der Null besassen. Das nachhaltigste für die Verbreitung indischer Methoden leistete *Fibonacci* in seinem »liber abaci«. Dieses Buch ist »die Fundgrube gewesen, aus der die Rechenmeister und Algebristen ihre Weisheit geschöpft haben; es ist dadurch überhaupt die Grundlage der neueren Wissenschaft geworden« [47]. Es enthält unter anderem die vier Spezies für ganze und gebrochene Zahlen in ausführlicher Darstellung. Besonders hervorzuheben ist, dass es neben der gewöhnlichen Subtraktion mit Entlehnen auch das Abziehen mit Erhöhung der nächsten Subtrahendenziffer um eins lehrt, dass also *Fibonacci* als der Schöpfer der eleganten Zuzählmethode anzusehen ist. — Wie *Alchwarizmî*, so hat auch *Leonardo Fibonacci* sechs Operationen, die Addition, Subtraktion, Duplation, Mediation, Multiplikation und Division. Vorübung für die Multiplikation bildet das Auswendiglernen des Einmaleins, für das Dividieren das des Einsineins, in folgender Form [115]:

$\frac{1}{2}$ de 1 est 0 et remanet 1
$\frac{1}{2}$ . . 2 . . . 1 0
⋮
$\frac{1}{2}$ . . 20 . . . 10 0
u. s. fort bis $\frac{1}{13}$ von 1, 2, . . . 130.

Die Art seiner Division bildet den Ausgangspunkt für das spätere Uebersichdividieren. Bei der Ausführung dieser Regel rückt der Divisor nicht nach rechts; der Dividend wird nicht gestrichen; die Reste stehen über dem Dividenden, der Quotient darunter, das Resultat daneben.

2. Das Rechnen mit Brüchen.

Auch hier hat *Fibonacci*, nachdem durch die Abacisten *Beda*, *Gerbert* und *Bernelinus* ausschliesslich römische Duodezimalbrüche gepflegt worden waren, eine neue Grundlage schon durch seine Vorübungen für die Division geschaffen.

Er führt den Bruchstrich und damit die moderne Schreibweise gewöhnlicher Brüche ein; er lehrt auch einen Bruch in eine Summe von Stammbrüchen zerlegen. Besonders zweckmässig ist im Falle kleiner Zahlen seine Methode zur Bestimmung des Hauptnenners: der grösste Nenner wird mit jedem folgenden multipliziert, und stets das grösste gemeinschaftliche Mass jedes Paars von Faktoren weggelassen. (Beispiel: das kleinste Gemeinvielfache von 24, 18, 15, 9, 8, 5 ist $24 . 3 = 72 | . 5 = 360$.)

3. Das angewandte Rechnen.

Das Rechnen der Abacisten hatte als Mittelpunkt die Bestimmung des Datums für das Osterfest, die Osterrechnung. Ausserdem finden sich angeblich von *Alcuin* geschriebene »Aufgaben zur Verstandesschärfung«, die an römische Muster erinnern. Auch hier bietet *Leonardo Fibonacci* das hervorragendste (die regula falsi); nur gehören seine Aufgaben mehr ins Gebiet der Algebra als in das der niederen Arithmetik.

Zahlentheoretische Untersuchungen dürfen von der Schule der Abacisten nicht erwartet werden. Dagegen kannte der Algorithmiker *Leonardo* die griechischen Betrachtungen über die Primzahlen und die Neunerprobe, für welch letztere er einen selbständigen Beweis lieferte.

D. Dritte Periode. Vom 15. bis 19. Jahrhundert.

1. Das Rechnen mit ganzen Zahlen.

Während das 14. Jahrhundert im grossen ganzen nur Reproduktionen aufzuweisen hat, beginnt eine neue Zeit reger Thätigkeit mit dem 15. Jahrhundert durch *Peurbach* und *Regiomontanus* in Deutschland, durch *Lucas Pacioli* in Italien. — Was die Einzelausführungen angeht, so steht bei der Addition die Summe bald über, bald unter den Posten; die Subtraktion kennt »Dazulegen« und »Entlehnen«; bei der

Multiplikation herrschen verschiedene Darstellungsweisen; im Dividieren hat sich noch keine feste Methode ausgebildet. Der Algorithmus *Peurbachs* nennt folgende arithmetische Operationen: Numeratio, Additio, Subtractio, Mediatio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Progressio (arithmetische und geometrische Reihen, dazu das Ausziehen der Quadratwurzel, welche vor Erfindung der Dezimalbrüche mit Hilfe von sexagesimalen Brüchen bestimmt wurde). Sein »Uebersichdividieren« hat noch das Rücken des Divisors; es wird folgendermassen ausgeführt (links die Erklärung der Ausführung, rechts *Peurbachs* Division, wobei die im Verlauf der Rechnung auszuwischenden Ziffern unten rechts mit einem Punkt versehen sind):

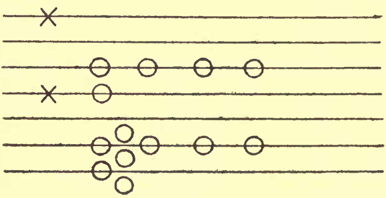
```
    |36
    |----
8479|235
6
----
24
12
----
12
 9
----
 37
 18
----
 19
 15
----
  49
  30
----
  19
```

```
   1.1
 1.3.4.
 2.2.9.9
 8 4 7 9 | 235
 3 6 6 6
```

Gesprochen würde in diesem Fall etwa: 36 in 84 zweimal, $2 . 3 = 6$, $8 - 6 = 2$ über 8 geschrieben; $2 . 6 = 12$, $24 - 12 = 12$ überschreiben, 2 streichen etc. Die Prüfung der Richtigkeit des Resultats findet wie bei den übrigen Operationen durch die Neunerprobe statt. Diese bei mündlicher Darstellung durchaus nicht schwerfällige Methode des Uebersichdividierens wird noch in Rechenbüchern gefunden, die kurz vor Beginn des 19. Jahrhunderts entstanden sind.

Im 16. Jahrhundert war der Rechenstoff in die Latein-

schulen in ziemlichem Umfang eingedrungen; aber an die grosse Menge der Volksjugend dachten vor 1525 weder Schul- noch Staatsmänner. Die erste treffliche Verordnung dieser Art ist die bayrische »Schuelordnungk de anno 1548«, welche auch in den Dorfschulen das Rechnen als obligatorischen Lehrgegenstand einführte[42]). — Es war das Rechnen (von einem etwaigen Fingerrechnen abgesehen) ein Rechnen auf Linien mit Marken oder ein Zifferrechnen. In beiden Fällen kam zuerst die Einübung des Numerierens in Ziffern. Um eine Operation in Marken auszuführen, zog man eine Anzahl horizontaler Parallelen auf geeigneter Unterlage. Von unten nach oben hatte eine Marke auf der 1., 2., 3., ... Linie den Wert 1, 10, 100, ..., zwischen den Linien aber bedeutete sie 5, 50, 500, ... Wie die Zahl



41 096½ dargestellt wurde, zeigt nebenstehende Figur. — Beim Abziehen legte man den Minuenden, beim Vervielfachen den Multiplikanden auf. Die Division wurde als successive Subtraktion behandelt. Dieses Linienrechnen verliert sich im 17. Jahrhundert vollständig, um dem eigentlichen schriftlichen Rechnen oder Zifferrechnen, von welchem es gleich zu Anfang in besseren Rechenschulen begleitet war, zu weichen.

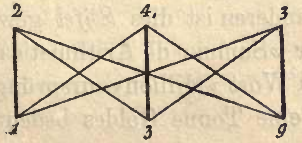
Im gewöhnlichen Handel und Verkehr des Mittelalters bediente man sich auch der weit verbreiteten Kerbenrechnung. Am Anfang des 15. Jahrhunderts war in Frankfurt am Main diese Rechnungsführung ganz gewöhnlich, und in England erhielt sie sich sogar bis ins 19. Jahrhundert herein. »Wenn man bei einem Kaufmann Gegenstände auf Borg nahm, so wurde der Betrag durch Striche auf einem Stäbchen angedeutet und dasselbe hernach der Länge nach gespalten, so dass von den zwei zusammenpassenden Teilen der Gläubiger den einen, der Schuldner den anderen behielt, somit beide gegen Uebervorteilung gesichert waren«[17]).

Im Zifferrechnen unterschieden die Rechner des 16. Jahrhunderts meist mehr als 4 Operationen; einige zählten deren 9, nemlich die 8 von *Peurbach* genannten und dazu als 9. Operation das Radizieren, das Ausziehen der Quadratwurzel nach der Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, das Ausziehen der Kubikwurzel nach $(a+b)^3 = a^3 + (a+b)\,3ab + b^3$. Definitionen kamen vor, waren aber vielfach nur Umschreibungen. So sagt *Grammateus:* »Multiplicatio oder Mehrung beschreibt ein zal durch die andere multipliciren oder mehren. — Subtractio oder Abziehung offenbart die zal zu subtrahiren oder ziehen ein zal von der andern, dass da werde gesehen die vbrig« [116]).

Die Addition fand statt wie heutzutage. Beim Abziehen pflegte man für den Fall einer grösseren Subtrahendenziffer in Deutschland diese Ziffer zu 10 zu ergänzen und zur Minuendenziffer zu legen, gleichzeitig aber die benachbarte Subtrahendenziffer höherer Ordnung um 1 zu vermehren (Zuzählmethode *Fibonacci's*). In ausführlicheren Büchern wurde für diesen Fall auch das Entlehnen gelehrt. Die Multiplikation, der stets die Einübung des Einmaleins voranging, erfolgte in mannigfacher Weise. Am häufigsten multiplizierte man wie heute mit treppenförmigem Einrücken nach links. *Luca Pacioli* schildert 8 Multiplikationsarten, worunter die eben erwähnte, dann zwei altindische; die eine ist die auf Seite 22 dargestellte, die andere die kreuz- oder blitzartige. Bei letzterem Verfahren bildete man alle Produkte mit Einern, alle mit Zehnern, alle mit Hundertern. Die Multiplikation

$$243 \,.\, 139 = 9 \,.\, 3 + 10\,(9 \,.\, 4 + 3 \,.\, 3) + 100\,(9 \,.\, 2 + 3 \,.\, 4 + 1 \,.\, 3) + 1000\,(2 \,.\, 3 + 1 \,.\, 4) + 10\,000 \,.\, 2 \,.\, 1$$

hatte in der Darstellung die Form:



In deutschen Büchern finden sich ausserdem zwei bemerkenswerte Arten der Vervielfachung, von denen eine **links** beginnt (ähnlich wie bei den Griechen) und die entstehenden Produkte nach einander in die richtige Stelle einschreibt, wie untenstehendes Beispiel 243 . 839 zeigt.

$$\begin{array}{r} 839 \\ 243 \\ \hline 166867 \\ 3129 \\ 232 \\ 14 \\ 2 \\ \hline 203877 \end{array}$$

Erklärung:

$$\begin{aligned} 839 \,.\, 243 = {} & 2 \,.\, 8 \,.\, 10^4 + 2 \,.\, 3 \,.\, 10^3 + 2 \,.\, 9 \,.\, 10^2 \\ & + 4 \,.\, 8 \,.\, 10^3 + 4 \,.\, 3 \,.\, 10^2 + 4 \,.\, 9 \,.\, 10 \\ & + 3 \,.\, 8 \,.\, 10^2 + 3 \,.\, 3 \,.\, 10 \;\, + 3 \,.\, 9. \end{aligned}$$

Beim Teilen herrschte das **Uebersichdividieren** (Ueberwärts-Dividieren); es wurde ausschliesslich geübt, obwohl *Luca Pacioli* schon 1494 das **Untersich-** (Unterwärts-) **Dividieren** in moderner Form lehrte.

Nach Ausführung der Rechnung verlangte man historischer Ueberlieferung gemäss eine **Probe**. Anfangs war dies die **Neunerprobe**. Wegen ihrer Unzuverlässigkeit, die schon *Pacioli* vollständig erkannt hatte, empfahl man die Ausführung der entgegengesetzten Operation. Im Lauf der Zeit wurde die Anstellung einer Probe ganz unterlassen.

Eigentliche Operationszeichen waren noch nicht im Gebrauch; sie kamen erst im 18. Jahrhundert aus der Algebra herüber in die elementare Arithmetik. Doch hat *Widmann* in seinem Rechenbuch die Zeichen + und —, die wahrscheinlich schon länger im Gebrauch der Kaufleute waren, da sie auch in einem Wiener Manuskript des 15. Jahrhunderts auftreten [31]). In späterer Zeit hat *Wolf* das Zeichen $\div$ für minus. Im Numerieren soll *Rudolff* zuerst das Wort »Million« gebraucht haben [31]), nach anderen ist dies *Stifel* gewesen [115]) oder aber *Pacioli* (in seiner »Summa de Arithmetica« 1494). Für die Italiener soll das Wort »Million« ursprünglich ein konkretes Mass, nämlich eine Tonne Goldes bedeutet haben. Eigen-

tümlicher Weise finden sich die Wörter »Billion, Trillion, Quadrillion, Quillion, Sixlion, Septilion, Oktilion, Nonilion« schon 1484 bei *Chuquet*, während das Wort »miliars« (gleich 1000 Millionen) auf *Jean Trenchant* von Lyon (1566) zurückzuführen ist [78]).

Das 17. Jahrhundert ist besonders erfinderisch an instrumentalen Hilfsmitteln zur mechanischen Ausführung der arithmetischen Grundoperationen. Die *Neper'schen* Rechenstäbe suchten die Erlernung des Einmaleins überflüssig zu machen. Es waren dies vierkantige Prismen, welche auf jeder Seite das kleine Einmaleins einer der Zahlen 1, 2, ... 9 trugen. Zum Quadrat- und Kubikwurzelausziehen benutzte man Stäbe mit aufgeschriebenen Quadraten oder Kuben der einzifferigen Zahlen. Eigentliche Rechenmaschinen, welche durch blosse Kurbeldrehung die Resultate lieferten, aber deshalb sehr künstlich und kostspielig ausfallen mussten, sind von *Pascal*, *Leibniz*, *Matthäus Hahn* (1778) erstellt worden.

Eine Erleichterung anderer Art sollten die Rechentafeln bilden. Da gab es Resolvierungstabellen, daneben aber auch gewaltige Einmaleinstafeln, wie diejenige des *Herwart von Hohenburg*, aus welcher die Produkte von je zweien der Zahlen 1 bis 999 unmittelbar abgelesen werden konnten.

Für das methodische Rechnen des 18. Jahrhunderts sind die arithmetischen Schriften der beiden *Sturm*, die von *Wolf* und *Kästner* bedeutsam. Man suchte im Interesse des kaufmännischen Rechnens die Multiplikation und Division durch Rechenvorteile abzukürzen, ohne dass dadurch wesentlich neues gewonnen wurde, wenn man nicht etwa dazu das sogenannte Kopfrechnen oder mündliche Rechnen zählen will, das in den letzten Jahrzehnten dieses Zeitraums als selbständige Uebung auftritt.

Das 19. Jahrhundert hat als Neues im elementaren Rechnen nur die Einführung der sogenannten österreichischen Subtraktion (durch Zuzählen) und Division

gebracht, Methoden, welche schon *Fibonacci* vorbereitet hat. Man berechnet 323 — 187 = 136, indem man spricht: 7 und 6, 9 und 3, 2 und 1; und 43083 : 185 folgendermassen:

	185
43083	232
608	
533	
163	

1	1679	2737	1
1	621	1058	1
2	184	437	2
2	46	69	1
	0	23	

Bei genügender Uebung hat dieses Verfahren gewiss eine beträchtliche Zeitersparnis zur Folge, namentlich im Falle der Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Masses zweier oder mehrerer Zahlen, wie das Beispiel $\frac{1679}{2737} \overset{23}{=} \frac{73}{119}$ zeigen mag.

2. Das Rechnen mit Brüchen.

Das Bruchrechnen wurde am Anfang dieser Periode für sehr schwierig gehalten. Zuerst lehrte man das Lesen der Brüche: »Es ist zu merken, dass ein ieglicher Bruch hat zwo figuren darzwischen ein linien. Die ober würt genannt der zeler und die under der nenner. Die aussprechung der Brüche ist also: nenne zum ersten die obere Figur, darnach die under mit dem Wörtlein theyl als $\frac{2}{3}$theyl«. (*Grammateus* 1518) [116]). Dann kamen Regeln über das Gleichnamigmachen der Brüche, über das Kürzen, Multiplizieren und Dividieren; bei letzterem wurde zuerst gleichnamig gemacht. Mehr findet sich bei *Tartaglia*, der den kleinsten Hauptnenner zu finden weiss, bei *Stifel*, der die Division durch einen Bruch vermittelst seines reciproken Werts ausführt, und noch bei einigen andern.

Die Einführung der Dezimalbrüche war der Idee nach vorbereitet durch die Systeme der Sexagesimal- und Duodezimalbrüche, denn der Vorteil in ihrer Anwendung beruht eben darauf, dass die Operationen mit gebrochenen

Zahlen in der einfachsten Weise ohne weitere Vorbereitung durch solche mit ganzen Zahlen ersetzt werden können. Eine Bezeichnung, wie sie bei Dezimalbrüchen gebräuchlich geworden ist, kennt schon *Rudolff*[31]; er lässt bei der Division ganzer Zahlen durch Potenzen von 10 die erforderliche Anzahl von Stellen »mit einer virgel« abschneiden. Die vollständige Kenntnis der Dezimalbrüche stammt von *Simon Stevin* her, der das Positionssystem auch unter die Einheit beliebig weit fortsetzt. Die Zehntel, Hundertel, Tausendel.... werden Primes, Sekondes, Terzes ... genannt; 4,628 wird $4_{\underline{0}}$ $6_{\underline{1}}$ $2_{\underline{2}}$ $8_{\underline{3}}$ geschrieben. (In den Zeigern $_{\underline{0}}$, $_{\underline{1}}$, $_{\underline{2}}$, $_{\underline{3}}$ deutet der Strich an, dass die Indices in einen kleinen Kreis eingesetzt zu denken sind.) *Jobst Bürgi* benutzt wohl unabhängig von *Stevin* in seiner Sinustafel Dezimalbrüche in der Form 0.32 für 0,32 und 3.2 für 3,2. Die Einführung des Kommas ist auf *Keppler* zurückzuführen. Im praktischen Rechnen wurden die Dezimalbrüche, abgesehen von logarithmischen Berechnungen, nur bei der Zinseszinsrechnung und in Reduktionstabellen angewendet; ins gewöhnliche Rechnen gingen sie mit Einführung dezimaler Währungssysteme im Anfang des 19. Jahrhunderts über.

3. Das angewandte Rechnen.

Das angewandte Rechnen hatte in der Uebergangsperiode des Mittelalters aus lateinischen Schriften vieles in oberflächlicher und unvollständiger Weise aufgenommen; das 15. und 16. Jahrhundert hat auch nach dieser Richtung Besseres aufzuweisen. Schon das Bamberger Rechenbuch von 1483 trägt ein ausschliesslich praktisches Gepräge und zielt nur auf Fertigkeit im Rechnen der kaufmännischen Kreise hin. Diejenige Lösungsart, welche in den Rechenbüchern überall die erste Stelle behauptete, war die Regeldetri, auch Kaufleutregel, goldene Regel[16] genannt. Die Darlegung der Regeldetri war eine rein mechanische; der

Gedanke an die zugehörige Proportion trat so weit zurück, dass sogar gute Rechenmeister 4 fl 12 ℔ 20 fl? statt 4 fl : 20 fl = 12 ℔ : x ℔ zu schreiben vermochten[116]). Für die Dreisatzregel mit indirekten Verhältnissen finden sich wohl Beispiele, aber keinerlei Erklärungen. Aufgaben aus der zusammengesetzten Regeldetri (regula de quinque etc.) wurden successive durch lauter Dreisätze gelöst. — Die Berechnung des mittleren Zahlungstermins findet sich bei *Tartaglia* und *Widmann* in der heute noch gebräuchlichen Art. Uebrigens herrscht gerade in *Widmann's* Rechenbuch von 1489 in den Regeln und Benennungen noch vielfach grosse Dunkelheit und Unübersichtlichkeit, so dass gar nicht selten dieselbe Sache unter verschiedenen Namen auftritt; er führt auf: »Regula Residui, Reciprocationis, Excessus, Divisionis, Quadrata, Inventionis, Fussi, Transversa, Ligar, Equalitatis, Legis, Augmenti, Augmenti et Decrementi, Sententiarum, Suppositiones, Collectionis, Cubica, Lucri, Pagamenti, Alligationis, Falsi«, so dass *Stifel* sich später nicht enthalten konnte, derartige Dinge geradezu als lächerlich zu erklären[114]). — Teilungs- und Mischungsaufgaben löste man durch so viele Dreisätze, als die Zahl der zu unterscheidenden Gruppen betrug. Für die Zinseszinsrechnung gibt *Tartaglia* vier Wege an, darunter stufenweise Berechnung von Jahr zu Jahr, oder Ausrechnung unter Benützung der Formel $b = aq^n$ ohne Aufstellung derselben. — Die Wechselrechnung wurde in ihrer einfachsten Gestalt gelehrt. Die Wechselbriefe selbst sollen von Juden, die im 7. Jahrhundert aus Frankreich vertrieben in die Lombardei einwanderten, gebraucht worden sein. Ghibellinen, welche aus der Lombardei flohen, führten den Gebrauch der Wechsel in Amsterdam ein, von wo sich ihre Anwendung weiter verbreitete[116]). 1445 wurden die Wechselbriefe nach Nürnberg gebracht. — Der Kettensatz, in seinem Wesen eine indische Methode, die *Brahmagupta* beschreibt, bildete sich im 16. Jahrhundert

aus, gelangte aber erst zwei Jahrhunderte später zu allgemeiner Anwendung. Die Art der Darstellung war eine verschiedene. *Pacioli* und *Tartaglia* schreiben alle Zahlen in eine wagrechte Reihe und multiplizieren Glieder gerader und Glieder ungerader Ordnung je in ein Produkt zusammen. Ebenso verfährt *Stifel*, nur setzt er alle Glieder vertikal unter einander. Bei *Rudolff*, der auch den Vorteil des Kürzens oder Hebens kennt, findet sich die moderne Art, den Kettensatz darzustellen, nur steht das Gliederpaar mit dem unbekannten Glied am Schluss.

Durch Kaufleute kam aus Italien ein Rechenverfahren nach Deutschland, welches im 16., mehr aber noch im 17. Jahrhundert eine hervorragende Stelle einnahm. Diese welsche Praktik, wie sie bald genannt wurde, fand ihre Verwendung bei der Entwicklung des Produkts zweier Glieder eines Dreisatzes, besonders wenn diese mehrsortige Grössen waren. Der Multiplikator wurde mit dem Bruch, der ihm etwa zugehörte, in Summanden zerlegt, die auf möglichst einfache Weise aus einander ableitbar sein mussten. Wie richtig *Stifel* die wahre Bedeutung und Leistungsfähigkeit der welschen Praktik erkannte, davon zeugt der Ausspruch[116]): »Die Wellisch Praktik ist nichts anderes, denn eine künstliche und kurtzweilige erfindung mangfaltiger forteil bey der Regeldetri. Aber doch, wer die Welsch praktik nicht weist, der bleibe bey der einfeltigen Regeldetri, so findet er eben das, welches jener findet durch die Wellisch practicam«. — In dieser Zeit finden sich auch schon Preistabellen und Zinstafeln (Rechenknechte) im Gebrauch; ihre Einführung ist wohl auch den Italienern zuzuschreiben. — Auf Beispiele für die Regula virginum und Regula falsi stösst man im 16. Jahrhundert auch in den Schriften für den gemeinen Rechenunterricht, in welche gewöhnlich das gesamte Wissen des Schriftstellers eingetragen wurde. Die Bedeutung dieser Regeln liegt aber nicht im Bereich der elementaren Arithmetik,

sondern in dem der Gleichungen. — Ebenso enthielten einige arithmetische Schriften Angaben über die Herstellung von Zauberquadraten, und die meisten derselben brachten als Zugabe arithmetische Rätsel und Scherzfragen (von *Rudolff* »Schimpffrechnung« genannt). Letztere sind häufig nur Einkleidungen von algebraischen Gleichungen (Aufgabe vom Hund und Hasen, vom Fass mit drei Zapfen, von der zu erratenden Zahl, welche durch gewisse Operationen verändert worden ist etc.).

Das 17. Jahrhundert brachte wesentliche Neuerungen nur auf dem Gebiet des kaufmännischen Rechnens. Während bei allen Zinsrechnungen mit gesuchtem Endwert schon das 16. Jahrhundert im Besitz der richtigen Methoden war, kamen für den Fall, dass der Barwert zu bestimmen war, also in der Rabattrechnung, meist grobe Verstösse vor. Man rechnete den Rabatt in 100, etwa wie in folgendem Beispiel [116]: »100 Thaler geben nach 2 Jahren 10 Thaler Zinsen; soll man nun die 100 Thaler gleich bezahlen, so ziehe man die 10 Thaler ab«. Kein geringerer als *Leibniz* hat darauf hingewiesen, dass der Rabatt auf 100 gerechnet werden müsse. Seine Methode begegnete bei der grossen Menge der Rechenmeister dem Missverständnis, dass wenn bei Rabattrechnungen unter Annahme von 5 % für 1 Jahr $\frac{1}{21}$ abgezogen werden müsse, der Abzug für 2 Jahre $\frac{2}{21}$ betrage. Erst im 18. Jahrhundert einigten sich nach langem heftigen Streit Mathematiker und Rechtsverständige auf die richtige Formel. — In der Wechselrechnung waren die Holländer den übrigen Völkern wesentlich überlegen. Sie besassen besondere Schriften über dieses Gebiet der kaufmännischen Arithmetik und waren durch sie mit den Grundzügen der Arbitragerechnung völlig vertraut. — Eben für den Gebrauch des kaufmännischen Rechnens wurden im 18. Jahrhundert Rechenvorteile für die Ausführung der Grundoperationen und der angewandten Beispiele in grosser Anzahl

erfunden. Die Wechsel- und Arbitragerechnung erfuhr durch *Clausberg* eine eingehende Begründung und Durchführung. Eine besondere Berücksichtigung fand neben dem schon bekannten Kettensatz die *Reesische* Regel, die man nicht als identisch mit der Kettenregel gelten liess. Das holländisch geschriebene Buch von *Rees* war 1737 ins Französische und aus dieser Sprache 1739 ins Deutsche übertragen worden. Beim Aufbau der Reihen wurde nach *Rees* mit dem Frageglied begonnen; im Ausrechnen kam erst das Wegschaffen der Brüche und das Kürzen, dann folgten die übrigen Operationen, Multiplikation und Division.

Das Gebiet der Kapital- und Zinsrechnungen erweiterte sich durch die Errichtung von Versicherungsinstituten zu einer sogenannten politischen Rechenkunst, in welcher Wahrscheinlichkeits- und Rentenrechnung die hervorragende Stelle einnehmen.

Die ersten Spuren der Vorbedingungen zur Entwicklung einer politischen Rechenkunst [55]) führen auf den römischen Präfekten *Ulpian* zurück, welcher etwa in der Mitte des 2. Jahrhunderts eine Tafel der Lebensdauer römischer Unterthanen entwarf. Von dem Vorhandensein eigentlicher Versicherungsinstitute findet sich aber bei den Römern keinerlei Anzeichen. Erst im Mittelalter zeigen sich einige Vorläufer in den Rechtseinrichtungen der Leibgedinge und des Gildenkaufs. Vom 14. Jahrhundert ab entstanden eigentliche Reise- und Unfallversicherungen, welche sich verpflichteten, gegen Vorausbezahlung einer gewissen Summe den Versicherten aus türkischer oder maurischer Gefangenschaft loszukaufen.

Im Gildenwesen des Mittelalters kam der Gedanke der Association zu gegenseitiger Unterstützung bei Feuersbrunst, Viehverlust und ähnlichem schon deutlich zum Ausdruck. Noch in höherem Masse war das der Fall bei den nach der Reformation entstehenden Handwerker-

zünften, welche förmliche Kranken- und Begräbniskassen einrichteten.

Als Vorläufer der Rentenversicherung hat man die Tontinen anzusehen. Der italienische Arzt *Lorenzo Tonti* veranlasste in der Mitte des 17. Jahrhunderts zu Paris eine Anzahl Personen, Geldsummen zusammenzulegen, deren Zinsen jährlich unter die noch lebenden Mitglieder verteilt werden sollten. Die französische Regierung betrachtete ein solches Verfahren als ein bequemes Mittel, Geld zu bekommen und gründete 1689—1759 zehn Staatstontinen, die aber 1770 sämtlich wieder eingingen, da sich herausgestellt hatte, dass diese Art von Staatsanlehen nicht vorteilhaft sei.

Unterdessen waren zwei Schritte geschehen, welche dem Versicherungswesen einen durch die Früchte der mathematischen Wissenschaften gesicherten Grund und Boden verschafften. *Pascal* und *Fermat* hatten die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung entworfen, und der holländische Staatsmann *de Witt* benützte ihre Methoden, um auf Grund der Geburts- und Todeslisten einiger Städte Hollands die Prinzipien der Rentenversicherung in einer besonderen Abhandlung niederzulegen. Andererseits brachte *Sir William Petty* 1662 in einem Werk über politische Arithmetik die ersten wertvollen Untersuchungen über die allgemeine Sterblichkeit bei, wodurch *John Graunt* zur Aufstellung von Totenlisten veranlasst wurde. Auch von dem Breslauer Geistlichen *Kaspar Neumann* wurden im Jahr 1692 Totenlisten veröffentlicht, und diese erregten solches Aufsehen, dass die königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu London den Astronomen *Halley* beauftragte, diese Tafeln zu prüfen. Auf das *Neumann'sche* Material gestützt, konstruierte *Halley* die erste vollständige Sterblichkeitstabelle für die verschiedenen Altersstufen. Da diese Tafel, welche allerdings erst ein halbes Jahrhundert später die verdiente Anerkennung fand, das Fundament für alle späteren Arbeiten

dieser Art abgegeben hat, so heisst *Halley* mit Recht der Erfinder der Sterblichkeitstabellen.

Die ersten Versicherungsinstitute der neueren Zeit entsprangen dem englischen Unternehmungsgeist. In den Jahren 1698 und 1699 entstanden zwei unbedeutendere Gesellschaften, deren Wirksamkeit eine nur beschränkte blieb. Allein im Jahr 1705 trat in London die »Amicable« auf, welche erst 1866 an eine neue Gesellschaft überging. Die »Royal Exchange« und »London Assurance Corporation«, zwei ältere Associationen für Feuer- und Seeversicherung, nahmen 1721 die Lebensversicherung in ihren Geschäftskreis auf, und sie bestehen heute noch. — Bald stellte sich auch bei den Leitern solcher Institute das dringende Bedürfnis nach verlässlichen Sterblichkeitstabellen ein, was die Veranlassung wurde, dass *Halleys* Werk durch *Thomas Simpson* der Vergessenheit entrissen wurde, und dass *James Dodson* nach der *Halley'schen* Methode die erste Prämientafel für Lebensversicherungen mit steigender Skala entwarf. Die älteste Gesellschaft, welche diese auf wissenschaftlichem Boden erwachsenen Neuerungen als Basis benützte, ist die 1765 gegründete »Equitable Society for the Assurance of Life and Survivorships.«

Während am Anfang des 19. Jahrhunderts in England schon 8 Lebensversicherungsgesellschaften ihre segensreiche Thätigkeit ausübten, gab es auf dem Kontinent um dieselbe Zeit, trotz mannigfacher Förderung des Versicherungswesens durch *Leibniz*, die *Bernoullis*, *Euler* u. a., kein einziges Institut dieser Art. In Frankreich entstand 1819 »la compagnie d'assurances générales sur la vie«. In Bremen war die Gründung einer Lebensversicherung durch die Kriegswirren des Jahres 1806 vereitelt worden. Erst 1828 konstituierten sich die zwei ältesten deutschen Gesellschaften, die eine in Lübeck, die andere in Gotha unter der Leitung von *Ernst Wilhelm Arnoldi*, dem »Vater des deutschen Versicherungswesens.«

Das 19. Jahrhundert hat die Litteratur der Sterblichkeitstafeln wesentlich bereichert; es bestehen solche von den Engländern *Arthur Morgan* und *Farr*, von dem Belgier *Quetelet*, von den Deutschen *Brune, Heym, Fischer, Wittstein* und *Scheffler*. Die neueste Errungenschaft auf diesem Gebiet ist die nach den Bestimmungen des internationalen statistischen Kongresses zu Budapest von 1876 entworfene Sterbetafel, welche die Sterblichkeit der Bevölkerung des deutschen Reiches in den zehn Jahren 1871 bis 1881 darstellt. — Für die Weiterentwicklung und Förderung des Lebensversicherungswesens sorgt das 1849 in London gegründete »Institute of Actuaries«, eine akademische Lehranstalt mit Prüfungen in allen Fächern des Lebensversicherungswesens. Auch in Berlin besteht seit 1868 ein »Kollegium der Lebensversicherungswissenschaft«, aber ohne Lerngelegenheit und Prüfungen.

Einen Ueberblick des Lebensversicherungswesens der Gegenwart und seiner Entwicklung in Deutschland liefern folgende Zusammenstellungen[55]. Es gab in Deutschland:

am Anfang des Jahres	L.V.Anstalten	vers. Personen	mit der Summe rund
1852	12	46 980	170 Mill. Mark
1858	20	90 128	300 „
1866	32	305 433	900 „

Es betrug ferner im Jahr 1868:

in	die Zahl der L.V.Anstalten	das vers. Kapital auf den Kopf	die ganze vers. Summe
Deutschland	34	21 Mark	1050 Mill. Mark
Grossbritannien u. Irland	170	300 „	9000 „
Frankreich	16	33 „	1245 „
dem übrigen Europa	25	3 „	600 „
den V. St. von N.Amerika	55	169 „	5400 „
der übrigen Welt	30	$^3/_4$ „	750 „
im Ganzen	330	$13^1/_2$ Mark	18045 Mill. Mark.

Was das 18. Jahrhundert mehr entwickelt oder neu geschaffen hat, wird im 19. Jahrhundert weiter gefördert. Das Schwergewicht des praktischen Rechnens liegt in der kaufmännischen Arithmetik. Dies spricht sich auch in einer ungemein reichen Litteratur aus, welche sich über alle Einzelheiten eingehend verbreitet hat, als wesentlich neu jedoch nur die Zinsberechnungsmethoden bei Kontokorrenten enthält.

III. Allgemeine Arithmetik und Algebra.

A. Ueberblick.

Die Uranfänge der allgemeinen Grössenlehre bilden die erste schöne Frucht von speziellen Zahlen- und Grössenbetrachtungen; sie sind bis zur ältesten Zeit zurückzuverfolgen, und nur allmählich hat sich ihr Kreis vergrössert und vervollständigt. Die erste Periode dieser Entwicklung erstreckt sich bis zu den Arabern und begreift die Wissenschaft dieses Volkes noch in sich; ihre Leistungen gipfeln in der vollständigen Lösung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten und in der versuchsweisen, meist geometrischen Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grads. Die zweite Periode umfasst den Anfang der Ausbildung mathematischer Wissenschaften bei den westlichen Völkern vom 8. bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts. Den Anfang dieses Abschnitts bildet *Gerberts*, den Schluss *Kepplers* Zeit. Die Rechnung mit allgemeinen Grössen erhält gestaltlich eine wesentliche Vereinfachung durch zweckmässige Wahl von kurzen Bezeichnungen zur Bildung von Formeln; materiell besteht die bedeutendste Errungenschaft in der rein rechnerischen Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grads durch Wurzelgrössen.

Mit *Leibniz* und *Newton* beginnt die dritte Periode (von der Mitte des 17. Jahrhunderts bis zur Gegenwart). Im ersten grösseren Abschnitt dieser Periode wurde durch die Entdeckung der Methoden der höheren Analysis ein neues Licht über bis dahin nur unvollständig erforschte Gebiete verbreitet. Am Schluss dieses ersten Abschnittes erscheinen die Kombinatoriker, welche sich den grossen Gesichtspunkten eines *Leibniz* fern hielten. Daher traten Ausländer, allen voran *Euler*, mit mehr als 700 Abhandlungen aus allen Zweigen der Mathematik, und *Lagrange* die Führung

auf dem Gebiet der reinen Analytik an. Den Anfang des zweiten Abschnitts der dritten Periode ziert der Name des grossen *Gauss*, der aus den Werken *Newtons* und *Eulers* die erste Nahrung für den in ihm schaffenden Genius zog. Von ihm aus ergeht durch die Veröffentlichung von mehr als 50 grösseren und einer Anzahl kleinerer Abhandlungen nicht bloss rein mathematischen, sondern auch astronomischen und physikalischen Inhalts eine Menge von Anregungen nach den verschiedensten Seiten hin. Es entstehen neue Teilgebiete, in welchen Männer wie *Abel*, *Jacobi*, *Cauchy*, *Dirichlet*, *Riemann*, *Weierstrass* und andere eine Reihe der schönsten Entdeckungen gemacht haben.

B. Erste Periode.

Von den ältesten Zeiten bis zu den Arabern.

1. Allgemeine Arithmetik.

Wie spärlich auch die Nachrichten sind, welche die Entwicklung der mathematischen Kenntnisse bei den ältesten Völkern zu schildern vermögen, so finden sich doch schon bei den Aegyptern einzelne Versuche, die Ausführung der Grundoperationen durch Zeichen in der Schrift anzudeuten. Aus Hieroglypheninschriften [16] kennt man als Zeichen der Addition ausschreitende Beine, welche nach der Richtung gehen, nach welcher die abgebildeten Vögel etc. sehen. Die Andeutung der Subtraktion besteht in drei parallelen horizontal gelegten Pfeilen. Das Gleichheitszeichen ist . Daneben finden sich auch Rechnungen, welche erkennen lassen, dass die Aegypter imstande waren, einfache Aufgaben aus dem Gebiet der arithmetischen und geometrischen Reihen zu erledigen. — Das letztere gilt auch für die Babylonier. Diese nahmen an, dass während der 15 Tage zwischen dem Neumond und Vollmond die Beleuchtungszunahme der Mondscheibe, die in 240 Teile geteilt wurde, an den 5 ersten

Tagen durch eine geometrische, an den folgenden 10 aber durch eine arithmetische Reihe dargestellt werden könne. Von den 240 Teilen wären am 1., 2., 3., ... 15. Tage sichtbar

5	10	20	40	1.20
1.36	1.52	2.08	2.24	2.40
2.56	3.12	3.28	3.44	4.

Die Aufzeichnung ist im sexagesimalen System geschehen, so dass $3.28 = 3.60 + 28 = 208$ zu nehmen ist [16]). Ausserdem kennt man aus altbabylonischen Denkmälern die 60 ersten Quadratzahlen und die 32 ersten Kubikzahlen in sexagesimaler Ausdrucksweise.

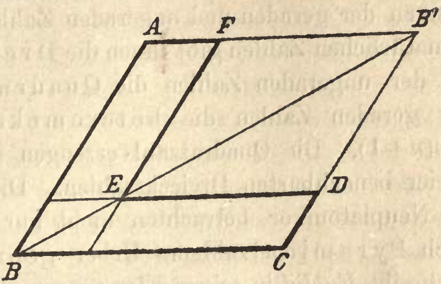
Sehr viel reicher wird die Ausbeute griechischer Schätze. Schon der Name der ganzen Wissenschaft, ἡ μαθηματική, entstammt der griechischen Sprache. Zur Zeit *Platons* umfasste das Wort μαθήματα alles das, was des wissenschaftlichen Unterrichts für wert erachtet wurde. Erst durch die Peripatetiker bekam das Wort seine besondere Bedeutung, indem als mathematische Wissenschaften die Rechenkunst (Logistik) und Arithmetik, die ebene Geometrie und Stereometrie, die Astronomie und Musik aufgezählt wurden. Bei *Heron von Alexandrien* insbesondere ist die Logistik nur elementares Rechnen, die Arithmetik aber eine zahlentheoretische Wissenschaft [78]).

Die griechische Arithmetik und Algebra trägt fast ausschliesslich ein geometrisches Gewand, ohne dass jedoch, namentlich in späterer Zeit, die rein arithmetische und algebraische Betrachtungsweise ganz zu vermissen wäre. *Aristoteles* [16]) kennt die Darstellung von Grössen, auch wenn diese keine Strecken sind, durch Bubstaben des Alphabets; er sagt nämlich an einer Stelle: »Wenn A das Bewegende, B das Bewegte, Γ die Weglänge, Δ die Zeit ist etc.« Bis auf *Pappus* hatte sich schon eine Art Buchstabenrechnung ausgebildet, da er imstande war, so viele allgemeine Grössen zu unterscheiden, als grosse Buchstaben im Alphabet vorhanden

waren (die kleinen Buchstaben α, β, γ, ... standen für die Zahlen 1, 2, 3, ...). *Aristoteles* hat auch ein besonderes Wort für »stetig« und eine Erklärung für kontinuierliche Grössen. Am weitesten ist *Diophant* gegangen. Von ihm gibt es schon Bezeichnungen für bekannte und unbekannte Grössen. *Hippokrates* nennt das Quadrat einer Grösse δύναμις (Vermögen), ein Wort, das als potentia ins Lateinische überging und später seine spezifisch mathematische Bedeutung erlangt hat. *Diophant* legt allen Potenzen der Unbekannten bis zur sechsten besondere Namen bei und führt sie in Abkürzungen ein, so dass x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 als $\delta\bar{\upsilon}$, $\varkappa\bar{\upsilon}$, $\delta\delta\bar{\upsilon}$, $\delta\varkappa\bar{\upsilon}$, $\varkappa\varkappa\bar{\upsilon}$ auftreten. Das Zeichen für bestimmte Zahlen ist $\mu\bar{o}$. In der Subtraktion benutzt *Diophant* das Zeichen ⋔ (ein umgekehrtes ψ); als Gleichheitszeichen gilt ι als Abkürzung von »ισοι, gleich«. Ein Glied eines Ausdrucks heist εἶδος; dieses Wort ging als species ins Lateinische über und wurde bei der Bildung des Titels arithmetica speciosa = Algebra benutzt[16]). — Die Formeln finden sich gewöhnlich in Worten ausgesprochen und geometrisch dargestellt, so lange es sich nur um Ausdrücke zweiter Dimension handelt. Dieser Art sind die zehn ersten Sätze im zweiten Buch *Euklids*, unter ihnen die Figuren, beziehungsweise wörtlichen Anführungen für die Ausdrücke $a(b+c+d+\ldots) = ab+ac+ad+\ldots$, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = (a+b)a + (a+b)b$.

Die Geometrie war den Griechen auch ein Mittel für zahlentheoretische Untersuchungen. Davon zeugen zunächt die Aufzeichnungen über Gnomonzahlen. Bei den Pythagoräern hiess der Rest eines Quadrats, aus dem eine Ecke quadratisch ausgeschnitten war, ein Gnomon. *Euklid* wandte diese Bezeichnung auch auf eine Figur $ABCDEF$ an, welche aus dem Parallelogramm $ABCB'$ dadurch erhalten wird, dass für D auf CB', E auf BB', F auf AB', das Parallelogramm $DEFB'$ abgeschnitten wird. Die pythagoräische Gnomonzahl ist $2n + 1$; denn wenn $ABCB'$ ein Quadrat ist,

so wird das Quadrat über der Strecke $DE = n$ Einheiten zum Quadrat über $BC = n + 1$ durch das Quadrat $(BE) = 1 . 1$



und die Rechtecke $(AE) = (CE) = 1 . n$ ergänzt, da man hat: $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. — Für die stete Verwendung geometrischer Versinnlichung sprechen auch Ausdrücke wie Flächen- und Körperzahlen als Produkte der Masszahlen von Raumgrössen mit zwei und drei Dimensionen.

Was bis zum 3. Jahrhundert vor Christo in der Zahlenlehre bekannt war, fasst *Euklid* übersichtlich zusammen. Er spricht in seinen Elementen von »Grössen«, ohne jedoch diesen Begriff zu erklären, und versteht darunter ausser Linien, Winkeln, Flächen und Körpern auch die natürlichen Zahlen [108]). Der Unterschied von grad und ungerade, von Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen, das Verfahren zur Bestimmung des kleinsten Gemeinvielfachen und des grössten gemeinschaftlichen Masses, die Erstellung rationaler rechtwinckliger Dreiecke nach *Platon* und den Pythagoräern — alle diese Dinge sind ihm geläufig. Von *Eratosthenes* rührt ein Verfahren (»das Sieb«) zur Aussonderung der Primzahlen her; es besteht darin, dass man von 3 ab alle ungeraden Zahlen aufschreibt und dann alle Vielfachen von 3, 5, 7, . . . streicht. *Diophant* gibt an, dass Zahlen von der Form $a^2 + 2ab + b^2$ ein Quadrat bilden, aber auch, dass solche von der Form $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ auf zweierlei Weise eine Summe von 2 Quadraten darstellen können; es ist nemlich $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b)^2 (c^2 + d)^2$.

Ziemlich umfangreich ist das Wissen der Griechen im Gebiet elementarer Reihen. Die Pythagoräer gehen von den Reihen der geraden und ungeraden Zahlen aus. Die Summe der natürlichen Zahlen gibt ihnen die Dreieckszahl, die Summe der ungeraden Zahlen die Quadratzahl, die Summe der geraden Zahlen die heteromeke Zahl von der Form $n(n+1)$. Die Quadratzahl erzeugen sie auch als Summe zweier benachbarten Dreieckszahlen. Die Neupythagoräer und Neuplatoniker betrachten nicht nur Polygonal-, sondern auch Pyramidalzahlen. Ueber geometrische Reihen schreibt *Euklid* in seinen Elementen. Er summiert einen Ausschnitt der Reihe $1 + 2 + 4 + 8 \ldots$ und bemerkt nebenbei, dass wenn die Summe dieser Reihe eine Primzahl ist, aus ihr eine vollkommene Zahl durch Multiplikation mit dem letzten Glied der Reihe hervorgeht ($1 + 2 + 4 = 7$; $7 . 4 = 28$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, vergl. S. 27). Konvergente unendliche Reihen treten bei *Archimedes* in der Form geometrischer Reihen, deren Exponent ein echter Bruch ist, wiederholt auf, beispielsweise in der Bestimmung des Flächeninhalts eines Parabelsegments, wo der Wert der Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{4}{3}$ gefunden wird. Ueberhaupt führt *Archimedes* zum Zweck der Berechnung von Flächen- und Rauminhalten eine Menge Wertbestimmungen für die Summe unendlicher Reihen aus; seine Methoden sind ihm ein Ersatz für die in solchen Fällen anwendbaren Integrationsmethoden der Neuzeit, so dass ihm Ausdrücke wie

$$\int_0^c x\,dx = \tfrac{1}{2}c^2, \qquad \int_0^c x^2\,dx = \tfrac{1}{3}c^3$$

und ähnliche ihrem Gehalt und Wesen nach völlig geläufig sind [124]).

Die Einführung des Irrationalen ist auf *Pythagoras* zurückzuführen, da er erkannte, dass die Hypotenuse eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks mit messbaren, also benennbaren Katheten unbenennbar sei. Der Pythago-

räer *Theodorus von Kyrene* beweist die Irrationalität der Quadratwurzeln aus 3, 5, 7,... 17.

Archytas teilt die Zahlen überhaupt in rationale und irrationale ein. *Euklid* widmet den irrationalen Grössen eine ganz besonders eingehende Untersuchung in seinen »Elementen«, welche ebensosehr der Arithmetik wie der Geometrie angehören. Drei Bücher unter den dreizehn, das 7., 8. und 9. Buch, sind rein arithmetischen Inhalts, und im zehnten Buch erscheint eine tief durchdachte Theorie der »Inkommensurabeln«, d. h. der irrationalen Grössen, an deren Stelle die Betrachtung geometrischer Verhältnisse tritt. Am Schluss dieses Buches zeigt *Euklid* auf sehr sinnreiche Weise, dass die Seite eines Quadrats und seine Diagonale inkommensurable Grössen sind; der Beweis gipfelt in der Aufstellung, dass für den Fall eines rationalen Verhältnisses dieser zwei Grössen eine Zahl gleichzeitig die Eigenschaft der geraden und ungeraden Zahlen haben müsste*). — *Archimed* berechnet in seiner Kreismessung eine ziemliche Anzahl von Näherungswerten für Quadratwurzeln, z. B.

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153},$$

ohne dass über den von ihm benützten Weg etwas sicheres bekannt geworden wäre. Auch *Heron* kennt solche Näherungswerte ($\frac{7}{5}$ statt $\sqrt{2}$, $\frac{26}{15}$ statt $\sqrt{3}$); er scheut durchaus nicht vor der Mühe, eine Quadratwurzel angenähert zu bestimmen, zurück, begnügt sich aber in den meisten Fällen mit der bekannten Näherung $\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a}$. So setzt er $\sqrt{63} = \sqrt{8^2 - 1} = 8 - \frac{1}{16}$. Für den Fall, dass grössere Genauigkeit erforderlich war, suchte *Heron* **) eine Formel von der Gestalt

*) Montucla I, S. 208. Montucla sagt, dass er einen Architekten gekannt habe, welcher der festen Zuversicht lebte, die $\sqrt{2}$ als ein Verhältnis endlicher ganzer Zahlen darzustellen zu können und der versicherte, er sei auf diesem Wege schon zur 100. Dezimale gediehen.

**) Tannery in Bord. Mém. IV (1881).

$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \ldots$ aufzustellen. Gelegentlich wird von ihm auch die Identität $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ benutzt; er findet z B. $\sqrt{108} = \sqrt{6^2 . 3} = 6\sqrt{3} = 6 . \frac{26}{15} = 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Ausserdem findet sich in *Herons* Stereometrica das erste Beispiel einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl, nemlich $\sqrt{81-144}$, welche aber vom Rechner ohne weiteres als 8 weniger $\frac{1}{16}$ eingesetzt wird, übereinstimmend mit der Thatsache, dass bei den Griechen negative Grössen unbekannt waren. *Diophant* rechnet wohl mit Differenzen, aber nur mit solchen, in welchen der Minuend grösser als der Subtrahend ist. — Ein anderes Verfahren, die Quadratwurzel auszuziehen, ist aus *Theon* bekannt; es stimmt mit dem heutzutage gebräuchlichen überein, nur benutzt es, wie dies bis zur Entwicklung der Dezimalbrüche üblich blieb, die babylonischen Sexagesimalbrüche.

Ausserdem findet man bei *Aristoteles* Spuren der Kombinatorik, und bei *Archimedes* einen Versuch der Darstellung einer Grösse, die über alle Grenzen hinaus wächst, zunächst durch seine Erweiterung des Zahlensystems, dann durch seine Sandrechnung. *Archimedes* fasst die acht ersten Rangordnungen des dekadischen Systems zu einer Oktade zusammen; 10 000 . 10 000 Oktaden bilden eine Periode, und diese Perioden werden wieder nach demselben Gesetz zusammengeordnet. — In der Sandrechnung löst *Archimedes* die Aufgabe, die Zahl der Sandkörner zu bestimmen, welche eine Kugel fassen kann, die das ganze Weltall einschliesst. Er setzt dabei voraus, dass 10 000 Sandkörner erst den Raum eines Mohnkornes einnehmen, und findet als Gesamtzahl aller Körner 1000 Myriaden der achten Periode seines Systems. Es ist möglich, dass *Archimedes* bei diesen Betrachtungen von der Absicht geleitet wurde, dem Gebiet beliebig kleiner Grössen, die in seinen Reihensummierungen auftraten, ein Gegenstück zu schaffen, das allerdings gewöhnlicher Rechnung nicht mehr zugänglich war.

In den Bruchstücken, welche man von Schriften römischer Feldmesser (Agrimensoren) kennt, finden sich nur wenige arithmetische Partien, nemlich solche über Vielecks- und Pyramidalzahlen. Offenbar sind sie griechischer Abstammung, und ihre zum Teil mangelhafte Abfassung beweist, dass bei den Römern für derartige Dinge kein volles Verständnis vorhanden war.

Reich ist die Ausbeute an arithmetischen Dingen aus den Schriften der indischen Mathematiker. Ihre Bezeichnungsweise ist eine schon ziemlich ausgebildete [16]). Bei *Aryabhatta* heisst die unbekannte Grösse gulikâ (»Kügelchen«), später yâvattâvat oder abgekürzt yâ (»so viel als«); die bekannte Grösse heisst rûpakâ oder rû (»Münze«). Soll zu einer Grösse eine andere addiert werden, so steht diese der ersteren ohne besonderes Zeichen nach. Aehnlich wird bei der Subtraktion verfahren, nur erhält in diesem Fall der Coëfficient des Subtrahenden einen Punkt übergesetzt, so dass positive Grössen (dhana = Vermögen) und negative (kshaya = Schulden) unterschieden werden. Auch die Potenzen einer Grösse erhalten besondere Namen. Es ist die zweite Potenz varga oder va, die dritte ghana oder gha, die vierte va va, die fünfte va gha ghata, die sechste va gha, die siebente va va gha ghata (ghata bedeutet Addition). Die irrationale Quadratwurzel heisst karana oder ka. In den Çulvasûtras, welche zu den religiösen Schriften der Inder zählen, dabei aber teilweise arithmetische und geometrische Ausführungen enthalten, tritt karana mit Zahlwörtern zusammen; es ist dvikaranî $= \sqrt{2}$, trikaranî $= \sqrt{3}$, daçakaranî $= \sqrt{10}$. — Sollen mehrere Unbekannte unterschieden werden, so heisst die erste yâ; die übrigen werden nach Farben genannt: kâlaka oder ka (die Schwarze), nîlaka oder nî (die Blaue), pîtaka oder pî (die Gelbe); es bedeutet also yâ kâ bhâ die Grösse x . y, da bhavitâ oder bhâ die Multiplikation angibt. Für »gleich« ist zwar auch ein Wort vorhanden; es wird aber in der

Regel nicht benutzt, weil das blosse Untereinanderstellen zweier Ausdrücke ihr Gleichsein bezeichnet.

Die Erweiterung des Zahlengebiets durch die negativen Zahlen ist den Indern sicher gelungen. Sie rechnen mit denselben und finden sie als Wurzelwerte von Gleichungen, wo sie freilich als eigentliche Lösungen nicht gelten. *Bhâskara* weiss sogar, dass eine Quadratwurzel eine positive und eine negative Grösse sein kann, auch dass $\sqrt{-a}$ nicht fürs gewöhnliche Zahlengebiet existiert; er sagt: »Das Quadrat einer positiven wie einer negativen Zahl ist positiv, und die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl ist zwiefach, positiv und negativ. Es gibt keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl, denn diese ist kein Quadrat« [16]).

Zu den Grundoperationen der Inder, deren sie 6 zählten, gehörte das Potenzieren und Radizieren. Letzteres lehrt *Aryabhatta* für die Quadrat- und Kubikwurzel nach den Formeln $(a+b)^2$ und $(a+b)^3$, und er spricht in der Ausführung von Gruppen zu 2, bezw. 3 Stellen. Die Bezeichnungen *Aryabhattas* sind für die Quadratwurzel varga mûla, für die Kubikwurzel ghana mûla (mûla = Wurzel, auch von der Pflanze). Umformungen von Ausdrücken mit Quadratwurzeln waren auch bekannt. *Bhâskara* wendet die Formel

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}$$

an; ebenso ist er imstande, Brüche, deren Nenner Quadratwurzeln enthalten, mit rationalem Nenner zu versehen. Annäherungsweise berechnete Quadratwurzeln stimmen in einigen Fällen nahezu mit griechischen Angaben überein.

Aufgaben über Versetzungen, welche bei den Griechen nur in Spuren nachzuweisen sind, beschäftigen die Inder in ziemlich weit gehender Weise. *Bhâskara* hat Formeln über Permutationen und Kombinationen ohne und mit Wiederholung; er kennt auch eine gute Anzahl zahlentheoretischer Sätze, die auf quadratische und kubische Reste, sowie auf rationale rechtwinklige Dreiecke Bezug haben. Auffallend ist jedoch,

dass man bei den Indern nichts über vollkommene, befreundete, mangelhafte und überschiessende Zahlen erfährt. Ebenso verschwindend ist die Kenntnis der figurierten Zahlen, welche gewisse griechische Kreise mit Vorliebe pflegten. Dagegen findet man bei *Aryabhatta*, *Brahmagupta* und *Bhâskara* arithmetische Reihen, sowie die Reihen $1^2+2^2+3^2+\ldots$, $1^3+2^3+3^3+\ldots$ summiert. Bei *Bhâskara* tritt auch die geometrische Reihe auf. — Was das Rechnen mit der Null betrifft, so weiss *Bhâskara*, dass $\frac{a}{0} = \infty$ ist.

Auch die Chinesen zeigen in ihrer Litteratur einiges von arithmetischen Untersuchungen, wie denn z. B. von *Tschu schi kih* im Jahr 1303 die Binomialcoëfficienten für die acht ersten Potenzen als alte Methode angegeben werden. — Mehr findet sich bei den Arabern. Hier stösst man zuvörderst auf den Namen *Alchwarizmîs*, dessen Algebra, wahrscheinlich durch *Atelhart von Bath* ins Lateinische übersetzt, mit den Worten beginnt[16]): »Gesprochen hat *Algorithmi*«. Dieser *Algorithmi* ist kein anderer als *Alchwarizmî*; sein Name hat sich also heute in der Form »Algorithmus« von der Erinnerung an seinen Träger vollständig abgelöst und ist ein vielgebrauchter Ausdruck für jedes häufig angewandte und nach bestimmten Regeln verlaufende Rechnungsverfahren geworden.

Noch im Anfang des 16. Jahrhunderts tritt in einem gedruckten mathematischen Werk ein »philosophus nomine Algorismus« auf, Beweis genug, dass der Verfasser die wahre Bedeutung des Wortes Algorithmus kennt. Aber dann verschwindet diese Kenntnis völlig, und erst in unserem Jahrhundert wurde sie von *Reinaud* und *Boncompagni* wieder neu entdeckt*).

Alchwarizmî hat sich an griechischen und indischen Mustern gebildet. Eine bekannte Grösse nennt er Zahl, die Unbekannte dschidr (Wurzel), das Quadrat derselben mâl (Vermögen). Bei *Alkarchî* findet sich ka'b (der Würfel) für

*) Fortschritte 1887, S. 23.

die dritte Potenz, und es werden daraus ferner gebildet mâl mâl $= x^4$, mâl ka'b $= x^5$, ka'b ka'b $= x^6$, mâl mâl ka'b $= x^7$ etc. Er behandelt auch einfache Ausdrücke mit Wurzelgrössen, ohne aber die Leistungen der Inder auf diesem Gebiet zu erreichen. Bei *Alchaijâmî* findet sich eine Stelle, aus welcher zu ersehen ist, dass das Radizieren stets auf die Anwendung der Formel $(a+b)^n$ zurückgeführt wurde. — Neues bringt *Alkalsâdî* [16]) durch die Einführung eines W u r z e l z e i c h e n s. Statt, wie es ursprünglich Sitte war, das Wort dschidr v o r die Zahl zu setzen, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden sollte, verwendet *Alkalsâdî* nur den Anfangsbuchstaben ج dieses Wortes und setzt ihn ü b e r den Radikanden, also

$$\overset{\text{ج}}{2} = \sqrt{2}, \quad \tfrac{1}{2}\overset{\text{ج}}{2} = \sqrt{2\tfrac{1}{2}}, \quad \overset{2}{\overset{\text{ج}}{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Bei den O s t a r a b e r n beschäftigten sich die Zahlentheoretiker in besonderer Weise mit der Auffindung rationaler rechtwinkliger Dreiecke und mit der Aufgabe, ein Quadrat zu finden, das um eine gegebene Zahl vergrössert oder verkleinert, wieder Quadrate gibt. Es wird z. B. von *Alchodschandî* geradezu ein Teil der Theorie von den quadratischen Resten erläutert, dazu noch der Satz bewiesen, dass unter Voraussetzung rationaler Zahlen die Summe zweier Kuben nicht wieder eine dritte Potenz sein kann. Auch von kubischen Resten war einige Kenntniss vorhanden, wie die Verwendung der Neunerprobe zur Bildung von Potenzen bei *Avicenna* beweist. Dieser Mathematiker stellt Sätze auf, welche sich kurz in der Form

$$(9n \pm 1)^2 \equiv 1 \ (mod\ 9), \quad (9n \pm 2)^2 \equiv 4 \ (mod\ 9),$$
$$(9n+1)^3 \equiv (9n+4)^3 \equiv (9n+7)^3 \equiv 1 \ (mod\ 9) \ \text{etc.}$$

darstellen lassen. *Albannâ* hat Ausführungen ähnlicher Art, welche eine Achter- und Siebener-Probe begründen.

Aus dem Gebiet der Reihen kannten die Araber jedenfalls arithmetische und geometrische Progressionen, dazu auch die Reihen der Quadrat- und Kubikzahlen. Griechischer Einfluss ist hier unverkennbar.

2. Algebra.

Das Buch des *Ahmes* bringt aus der ägyptischen Litteratur Beispiele von Gleichungen ersten Grads, bei deren Lösung schon gewisse systematisch gewählte Wege eingeschlagen werden. Die Unbekannte x heisst Hau (der Haufen); eine Gleichung [76]) tritt wie folgt auf: Haufen sein $\frac{2}{3}$, sein $\frac{1}{2}$, sein $\frac{1}{7}$, sein Ganzes, es gibt 37, d. h. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x + x = 37$.

Die Griechen kennen in älterer Zeit die Lösung von Gleichungen nur in geometrischer Gestalt. Für Gleichungen ersten Grads finden sich zwar, von den Proportionen abgesehen, nirgends ausgeführte Beispiele, welche unzweideutig zeigen würden, dass der Verschwindungswert einer linearen Gleichung mit einer Unbekannten etwa durch den Schnitt zweier Geraden bestimmt worden wäre; wohl aber bieten die Ausführungen an Gleichungen zweiten und dritten Grads eine reiche Fülle Stoffs dar. In der Bezeichnungsweise geht *Diophant* am weitesten. Bei ihm heissen die Coëfficienten der Unbekannten πλῆθος. Sind mehrere Unbekannte zu unterscheiden, so gebraucht er für sie Ordnungszahlen: ὁ πρῶτος ἀριθμὸς, ὁ δεύτερος, ὁ τρίτος. Eine Gleichung [76]) erscheint bei ihm in abgekürzter Form:

$$\kappa^{\upsilon}\beta\ \delta^{\upsilon}\overline{\alpha}\ \tilde{\iota}\sigma\eta\ \varsigma\varsigma^{o\tilde{\iota}\varsigma}\overline{\delta}\ \phi\ \mu^{o}\overline{\iota\beta},\ \text{d. h. } 2x^3 + x^2 = 4x - 12.$$

Diophant teilt die Gleichungen nicht nach dem Grad, sondern nach der Anzahl ihrer wesentlich von einander verschiedenen Glieder ein. Zu diesem Zweck gibt er bestimmte Vorschriften darüber, wie man Gleichungen auf ihre einfachste Form bringt, nemlich auf diejenige, bei welcher beide Seiten der Gleichung nur positive Glieder haben. — Angewandte Aufgaben, welche zu Gleichungen ersten Grads führen, finden sich bei *Archimedes* und *Heron*; letzterer hat sogenannte Brunnenaufgaben, die an gewisse Stellen im Rechenbuch des *Ahmes* erinnern. — Die Gleichungen zweiten Grads hatten meist

die Gestalt von Proportionen, und dieses Hilfsmittel zu Operationen im Gebiet einer geometrischen Algebra war den Griechen sehr geläufig. Sie verstanden zweifellos Gleichungen von der Form

$$\frac{a'}{a''}x = b, \quad \frac{a'}{a''}x + \frac{b'}{b''}y + \ldots = m,$$

wo alle Grössen linear sind, durch Figuren darzustellen. Jede Aufstellung von Mittelgrössen in zwei gleichen Verhältnissen oder einer Proportion bestand eigentlich in nichts anderem als in der Lösung einer Gleichung. Die Schule der Pythagoräer kannte das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel zweier Grössen, d. h. sie löste geometrisch die Gleichungen

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad x^2 = ab, \quad x = \frac{2ab}{a+b}.$$

Nach *Nikomachus* hat *Philolaus* den Würfel mit seinen 6 Flächen, 8 Ecken und 12 Kanten die geometrische Harmonie genannt, weil er nach allen Richtungen gleiche Abmessungen darbiete; daraus soll der Name harmonisches Mittel, harmonische Proportion abgeleitet worden sein; in der That ist

$$\frac{12 - 8}{8 - 6} = \frac{12}{6} \quad \text{oder} \quad 8 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 12}{6 + 12}.$$

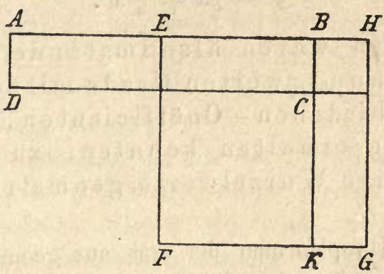
Die Zahl der verschiedenen Proportionen wurde später bis auf zehn vermehrt, ohne dass allerdings dadurch wesentlich neues geleistet worden wäre. Gründliche Auseinandersetzungen über die Proportionen, d. h. über die geometrische Lösung von Gleichungen ersten Grads und von rein quadratischen Gleichungen, gibt *Euklid*, zunächst nicht als Frucht eigener Arbeit, sondern als Bericht über ausführliche Darlegungen, die dem *Eudoxus* zu verdanken sind.

Eine ganz hervorragende Beachtung verdient die Lösung der Gleichung zweiten Grads auf geometrischem Weg durch die Flächenanlegung, welche bei den Alten, besonders bei *Euklid*, eine ausgedehnte Verwendung fand.

Um nach *Euklids* Art die Gleichung

$$x^2 + ax = b^2$$

zu lösen, stellt man die Aufgabe zunächst folgendermassen:



»An die Strecke $AB = a$ das Rechteck (DH) von bekannter Fläche $= b^2$ so anzulegen, dass (CH) ein Quadrat wird«. Die Figur zeigt für $CK = \frac{a}{2}$, dass $(FH) = x^2 + 2x \cdot \frac{a}{2} + (\frac{a}{2})^2 = b^2 + (\frac{a}{2})^2$ ist; aber mit Hilfe des pythagoräischen Satzes ist $b^2 + (\frac{a}{2})^2 = c^2$, woraus $EH = c = \frac{a}{2} + x$, also $x = c - \frac{a}{2}$ sich ergibt. Die durch Flächenanlegung erhaltene Lösung, bei welcher die Quadratwurzel stets positiv genommen wird, ist demnach nichts anderes als eine konstruktive Darstellung des Wertes

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{b^2 + (\tfrac{a}{2})^2} = c - \frac{a}{2}.$$

In derselben Weise löst *Euklid* alle Gleichungen von der Form

$$x^2 \pm ax \pm b^2 = 0$$

und bemerkt dabei, wo in moderner Schreibweise $\sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2}$ auftritt, dass die Bedingung für die Möglichkeit der Lösung $b > \frac{a}{2}$ ist. Negative Grössen werden nirgends berücksichtigt; jedoch ist Grund vorhanden anzunehmen, dass im Fall zweier positiver Lösungen die Griechen dieselben wohl beachteten, und dass sie ihre Lösungsweise auch auf quadratische Gleichungen mit Zahlencoëfficienten anwandten [124]). Durch Hinzuziehung der Proportionslehre konnten nicht nur die Gleichungen von der Form $x^2 \pm ax \pm b^2 = 0$, sondern auch die allgemeineren

$$\alpha x^2 \pm ax \pm b^2 = 0$$

für α als Verhältnis zweier Strecken gelöst werden; dies thut *Apollonius* mit Hilfe eines Kegelschnitts, der die Gleichung hat:

$$y^2 = px \mp \frac{p}{a} x^2.$$

Die Griechen waren also imstande, jede allgemeine Gleichung zweiten Grads mit zwei wesentlich verschiedenen Coëfficienten, die auch Zahlenwerte erhalten konnten, zu lösen und deren positive Wurzelwerte geometrisch darzustellen.

Die drei Hauptformen der erst aus geometrischer Einkleidung herauszulösenden Gleichungen zweiten Grads, welche vollständig behandelt wurden, waren also

$$x^2 + px = q, \; x^2 = px + q, \; px = x^2 + q.$$

Die Lösung bestand in einer Flächenanlegung, d. h. es war die Aufgabe zu lösen, an eine gegebene Strecke ein Rechteck so anzulegen, dass es entweder eine gegebene Fläche erhalte, oder um ein Gewisses grösser oder kleiner werde als diese gegebene Fläche. Für diese drei Forderungen entstanden die Kunstausdrücke παραβολή, ὑπερβολή, ἔλλειψις, welche nach *Archimedes* in enge Beziehung zur Kegelschnittslehre traten*).

In späterer Zeit, bei *Heron* und *Diophant*, hat sich die Auflösung der Gleichungen zweiten Grads schon teilweise von der geometrischen Darstellung losgelöst, um in eine eigentliche Rechenaufgabe überzugehen (unter Vernachlässigung des zweiten Zeichens bei der Quadratwurzel).

Die Gleichung dritten Grads spielte in ihrer Abhängigkeit von geometrischen Problemen bei den Griechen eine grosse Rolle. Besondere Berühmtheit erlangte die Aufgabe von der Würfelverdopplung (der Multiplikation des

*) Tannery in Bord. Mém. IV.

Würfels), welche nichts anderes als die Lösung der fortlaufenden Proportion $a:x = x:y = y:2a$, d. h. die Lösung der Gleichung $x^3 = 2a^3$ (allgemein $x^3 = \frac{m}{n} a^3$) verlangt. Diese Aufgabe war sehr alt und stand bei hervorragenden Geistern in besonderem Ansehen; davon zeugt eine Stelle bei *Euripides*, der den König *Minos* über das neu zu erbauende Grabmal des *Glaukos* sagen lässt [16]):

»Zu klein entwarfst du mir die königliche Gruft;
Verdopple sie; des Würfels doch verfehle nicht«.

Die von *Hippokrates*, *Platon*, *Menächmus*, *Archytas* und anderen ersonnenen zahlreichen Lösungen der Gleichung $x^3 = 2a^3$ erfolgte stets geometrisch, und es erweiterte sich der Gesichtskreis nach dieser Seite hin mit der Zeit so beträchtlich, dass *Archimedes* beim Studium seiner Kugelteilungen Gleichungen von der Form

$$x^3 - ax^2 + b^2c = 0$$

durch den Schnitt zweier Linien zweiten Grads löste, und dabei auch zugleich untersuchte, welche Bedingungen zu erfüllen seien, damit zwischen 0 und a kein Wert oder einer oder zwei Werte sich befinden. Da die Reduktionsmethode, nach welcher *Archimedes* die Gleichung $x^3 - ax^2 + b^2c = 0$ erhält, sich mit ziemlicher Leichtigkeit auf alle Klassen von Gleichungen dritten Grads anwenden lässt, so gebührt das Verdienst, diese Gleichungen begriffsmässig aufgestellt und eine Hauptgruppe derselben durch geometrische Methoden gelöst zu haben, unstreitig den Griechen [124]).

Von unbestimmten Gleichungen findet sich die erste Spur bei *Archimedes* als Rinderproblem (Problema bovinum).

Diese Aufgabe, im Jahr 1773 von *Lessing* als erstes von vier noch ungedruckten Stücken zur griechischen Anthologie aus einem Kodex der Bibliothek zu Wolfenbüttel veröffentlicht, ist in 22 Distichen gegeben, und rührt aller Wahrscheinlichkeit nach unmittelbar von

Archimedes her, der durch dieses Beispiel zeigen wollte, wie man von einfachen Zahlengrössen ausgehend leicht durch Ineinanderflechten der Bedingungen zu sehr grossen Zahlen gelangen könne. Der Anfang dieses Gedichtes arithmetischen Inhalts lautet in der Uebersetzung [62]):

»Aufgabe,

welche *Archimedes* unter Epigrammen fand, und den in Alexandrien mit der Untersuchung derartiger Dinge Beschäftigten übersandte in dem an *Eratosthenes*, den Kyrenäer, gerichteten Brief:

Berechne, o Freund, die Menge der Sonnenrinder,
Sorgfalt dabei anwendend, wenn du an Weisheit Teil hast:
Berechne, in welcher Zahl sie einst weidete auf den Fluren
der sicilischen Insel Thrinakien, vierfach in Herden geteilt,
wechselnd an Farbe, die eine von milchweissem Aussehn,
von schwarzer Farbe die zweite erglänzend,
braungelb sodann die dritte, die vierte scheckig; in jeder
Herde waren die Stiere überwiegend an Menge
in folgendem Verhältnisse stehend: die weisshaarigen
nimm, o Freund, als gleich der Hälfte, und dem dritten
Teile der schwarzen und sämtlichen braunen;
die schwarzen aber gleich dem vierten Teil
und dem fünften der scheckigen und dazu der sämtlichen braunen;
die noch übrigen scheckigen aber betrachte
als gleichkommend dem sechsten und siebenten Teile
der weissen Stiere und wiederum sämtlicher braunen« etc.

Im ganzen bietet die Aufgabe 9 Gleichungen mit 10 Unbekannten:

$$x = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})\, y + z \qquad y = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5})\, v + z$$
$$v = (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7})\, x + z \qquad x' = (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4})\, (y + y')$$
$$y' = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5})\, (v + v') \qquad v' = (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6})\, (z + z')$$
$$z' = (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7})\, (x + x') \qquad x + y = w'^2$$
$$vy + z = \frac{w^2 + w}{2}$$

Nach *Amthor* wird eine Lösung erzielt, wenn man die *Pell*'sche Gleichung $t^2 - 2 . 3 . 7 . 11 . 29 . 353\, u^2 = 1$ unter der Bedingung $u \equiv o$ $(mod.\ 2 . 4657)$ behandelt, wobei ein Kettenbruch mit 91gliedriger Periode erscheint. Die Zahl aller Stiere ergibt sich alsdann zu 5 916 837 175 686, eine Zahl, welche immerhin noch viel kleiner ist als diejenige, von welcher in der Sandrechnung des *Archimedes* die Rede ist.

Am engsten mit derartigen Gleichungssystemen verknüpft ist aber der Name *Diophants.* Er sucht seine unbestimmten Gleichungen nicht in ganzen, sondern nur in rationalen Zahlen (negative Grössen wie überall ausgeschlossen) zu befriedigen und bildet also Lösungen von der Form $\frac{p}{q}$, wo p und q ganze positive Zahlen sein müssen. Es scheint, dass *Diophant* auf diesem Gebiet nicht nach allgemeinen Methoden, sondern mehr nach sinnreichen Einfällen verfahren ist; wenigstens lassen die von ihm bekannt gewordenen Lösungen unbestimmter Gleichungen ersten und zweiten Grads keinen andern Schluss zu. *Diophants* Thätigkeit scheint von früheren Arbeiten, namentlich von solchen des *Heron* und *Hypsikles* nicht unwesentlich beeinflusst worden zu sein. Es darf angenommen werden, dass schon in vorchristlicher Zeit eine unbestimmte Analytik bestand, auf welcher Diophant weiterbauen konnte*).

Die indische Algebra erinnert in mannigfacher Hinsicht an *Diophant* und *Heron.* Wie bei *Diophant* werden negative Wurzeln einer Gleichung nicht als Lösungen zugelassen, aber, was gegen *Diophant* ein Fortschritt ist, in bewusster Weise beseitigt. Auch die Umformung der Gleichungen, die Vereinigung der Glieder mit gleichen Potenzen der Unbekannten, geschieht wie bei *Diophant.* Die schriftliche Darstellung der Gleichungen ist nach *Bhâskara* folgende[76]:

$$\begin{array}{c} \underline{Ja\ bha\ 2 \mid Ja\ \dot{1} \mid Ru\ 30} \\ Ja\ bha\ 0 \mid Ja\ 0 \mid Ru\ \ 8, \end{array}$$

$$\text{d. h. } 2x^2 - x + 30 = 0x^2 + 0x + 8 = 8.$$

Gleichungen ersten Grads treten nicht bloss mit einer, sondern auch mit mehreren Unbekannten auf. Wesentliche Fortschritte lässt die indische Behandlungsweise der Gleichungen zweiten Grads erkennen. Zunächst wird $ax^2 + bx = c$ als einzige Hauptform anstatt der drei griechischen Formen

*) P. Tannery in Mém. de Bord. 1880.

$ax^2 + bx = c$, $bx + c = ax^2$, $ax^2 + c = bx$ aufgestellt, daraus $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$ und ferner $(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$ gebildet, woraus

$$x = \frac{-b + \sqrt{4ac + b^2}}{2a}$$

folgt. Noch weiter geht *Bhâskara*, der die Quadratwurzel mit zwei verschiedenen Zeichen nimmt und auch weiss, wann sie nicht ausgezogen werden kann; jedoch werden von ihm zwei Wurzelwerte als Lösungen nur dann zugelassen, wenn beide positiv sind und zwar offenbar deshalb, weil seine quadratischen Gleichungen ausschliesslich in angewandt rechnerischer und geometrischer Einkleidung auftreten. Auch Gleichungen dritten und vierten Grads löst *Bhâskara* in Fällen, wo diese Gleichungen durch zweckdienliche Umformung oder Einführung von Hilfsgrössen auf den zweiten Grad zurückgeführt werden können.

Besonders hervorragend ist die unbestimmte Analytik der Inder. Hier werden im Gegensatz zu *Diophant* nur Lösungen in ganzen positiven Zahlen zugelassen. Die unbestimmten Gleichungen ersten Grads mit zwei und mehr Unbekannten löst schon *Aryabhatta*, und nach ihm *Bhâskara*, durch ein Verfahren, bei welchem der *Euklid'sche* Algorithmus der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Masses benutzt wird, so dass diese Lösungsweise wenigstens in den Grundzügen mit der Lösung nach dem Kettenbruchverfahren übereinstimmt. Unbestimmte Gleichungen zweiten Grads, z. B. solche von der Form $xy = ax + by + c$, werden entweder dadurch gelöst, dass zunächst y ganz willkürlich gewählt und daraus x gefunden wird; oder man benutzt geometrische Betrachtungen zur Lösung unter Zuhilfenahme der Flächenanlegung; oder aber man verwendet die cyklische Methode [16]), welche zwar nicht notwendig zum Ziele führen muss, wohl aber bei geschickter Wahl der Hilfsgrössen ganzzahlige Werte geben kann. Diese cyklische Methode

besteht darin, dass zunächst statt $ax^2 + b = cy^2$ eine Gleichung $ax^2+1=y^2$ gelöst wird, und zwar mit Hilfe einer empirisch angenommenen Gleichung $aA^2 + B = C^2$, aus der durch Lösung unbestimmter Gleichungen ersten Grads andere Gleichungen derselben Form $aA_n + B_n = C_n$ sich ableiten lassen, die dann auch durch geschickte Kombination eine Lösung von $ax^2+1=y^2$ ergeben sollen.

Die chinesische Algebra hat, wenigstens in der frühesten Periode, mit der griechischen das gemein, dass die Gleichungen zweiten Grads geometrisch gelöst werden. In späterer Zeit scheint sich auch ein Näherungsverfahren für die Bestimmung von Wurzelwerten höherer algebraischer Gleichungen ausgebildet zu haben. Zur Lösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grads haben die Chinesen selbständig eine Methode ausgebildet. Sie führt den Namen der »grossen Erweiterung« und ihre Erfindung wird *Sun tse,* der im dritten Jahrhundert n. Chr. lebte, zugeschrieben. Diese Methode lässt sich am besten durch folgendes Beispiel kurz charakterisieren: Gesucht sei eine Zahl x, welche durch 7, 11, 15 geteilt bezw. die Reste 2, 5, 7 liefert. Man suche k_1, k_2, k_3 so, dass

$$\frac{11\,.\,15\,.\,k_1}{7}=q_1+\tfrac{1}{7},\quad \frac{15\,.\,7\,.\,k_2}{11}=q_2+\tfrac{1}{11},\quad \frac{7\,.\,11\,.\,k_3}{15}=q_3+\tfrac{1}{15}$$

wird; man erhält z. B. $k_1=2$, $k_2=2$, $k_3=8$ und bildet ferner

$$\begin{aligned} 11\,.\,15\,.\,2 &= 330, & 330\,.\,2 &= 660,\\ 15\,.\,\ 7\,.\,2 &= 210, & 210\,.\,5 &= 1050,\\ 7\,.\,11\,.\,8 &= 616, & 616\,.\,7 &= 4312, \end{aligned}$$

$$660 + 1050 + 4312 = 6022;\ \frac{6022}{7\,.\,11\,.\,15}=5+\frac{247}{7\,.\,11\,.\,15},$$

$x=247$ ist eine Lösung der vorgelegten Gleichung*).

In der Schreibweise der Gleichungen wenden die Chinesen ebensowenig wie die Inder ein Gleichheitszeichen an. Die

*) L. Matthiessen in Schlömilch's Z. XXVI.

positiven Coëfficienten sind rot, die negativen schwarz verzeichnet. Neben dem Absolutglied steht in der Regel *täe*, neben dem Coëfficienten der ersten Potenz *yuen*; das übrige lässt das Beispiel $14x^3 - 27x = 17$ erkennen [16]), wo r und s die Farbe der Coëfficienten andeuten:

r 14	oder	r 14	oder	r 14	
r 00		r 00		r 00	
s 27 *yuen*		s 27		s 27	*yuen*
r 17 *täe*		r 17 *täe*		r 17.	

Die Schüler der Inder und Griechen zugleich sind die Araber. Sie benützen die Methoden dieser ihrer Vorgänger und vervollkommnen sie besonders nach der rechnerischen Seite hin. Hier findet man zunächst den Ursprung des Wortes Algebra, und zwar in den Schriften *Alchwarizmîs*, der von »*Aldschebr walmukâbala*« im Titel eines seiner Werke spricht. Dieser Ausdruck bezeichnet zwei bei der Ordnung der Gleichungen verwendete Hauptoperationen der Araber. Wenn man aus $x^3 + r = x^2 + px + r$ die neue Gleichung $x^3 = x^2 + px$ bildet, so ist dies *Almukâbala;* die bei den Alten sehr wichtige Umformung, welche aus $px - q = x^2$ die Gleichung $px = x^2 + q$ liefert, hiess *Aldschebr*, und dieser Name übertrug sich auf die Wissenschaft, welche Gleichungen überhaupt behandelt.

Die älteren Araber schrieben ihre Gleichungen in fortlaufendem Texte aus, z. B. *Alchwarizmî* [76]) (in lateinischer Uebersetzung):

Census et quinque radices equantur viginti quatuor
$(x^2 + 5x = 24)$,

und *Alchaijâmi*:

Cubus, latera et numerus aequales sunt quadratis
$(x^3 + bx + c = ax^2)$.

In späterer Zeit entstand für die Algebra eine ziemlich weit geführte Zeichensprache, und diese machte bei den Westarabern die bedeutendsten Fortschritte. Die Unbekannte x

war *dschidr*, ihr Quadrat *mâl*; durch die Anfangsbuchstaben dieser Wörter erhielt man die Abkürzungen $x=$ ش, $x^2=$ م. Grössen, welche ohne weiteres auf einander folgen, werden addiert; für die Subtraktion ist ein besonderes Zeichen vorhanden. »Gleich« wird durch den Endbuchstaben von *adala* (gleichsein) bezeichnet, nemlich durch ein finales lâm, hier mit δ gegeben. Bei *Alkalsâdî* [16]) sind $3x^2 = 12x + 63$ und $\frac{1}{2}x^2 + x = 7\frac{1}{2}$ dargestellt durch

$$\begin{array}{cccc} 63 & \text{ش} & \delta & \text{م} \\ & 12 & & 3 \end{array}; \qquad \begin{array}{cccc} \frac{1}{2}7 & \delta & \text{ش} & \text{م} \\ & & 1 & \frac{1}{2} \end{array},$$

und die Proportion $7 : 12 = 84 : x$ erhält die Form:

$$\text{ﺟ} \;.\!\cdot\!.\; 84 \;.\!\cdot\!.\; 12 \;.\!\cdot\!.\; 7.$$

Schon *Diophant* hatte die Gleichungen nicht nach ihrem Grad, sondern nach der Anzahl ihrer Glieder gruppiert. Ganz ausgeprägt findet sich dieses Einteilungsprinzip bei den Arabern. So bildet *Alchwarizmî* [76]) für die Gleichungen ersten und zweiten Grads folgende sechs Gruppen:

$x^2 = ax$ (»ein Quadrat ist gleich Wurzeln«),

$x^2 = a$ (»ein Quadrat ist gleich einer Zahl«),

$ax = b$, $x^2 + ax = b$, $x^2 + a = bx$, $ax + b = x^2$,

(»Wurzeln und eine Zahl sind gleich einem Quadrat«).

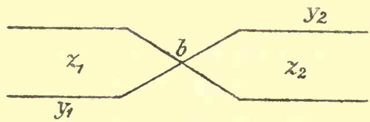
Gleichungen des ersten Grads wussten die Araber nach vier verschiedenen Methoden aufzulösen, von denen jedoch nur eine besonderes Interesse erregt, weil sie in der modernen Algebra als Näherungsmethode für Gleichungen höheren Grads ausgebildet worden ist. Diese ihrem Ursprung nach indische Lösungsart, welche sich namentlich bei *Ibn Albanna* und *Alkalsâdî* findet, und dort »Methode der Wagschalen« heisst, ging in die lateinischen Uebersetzungen als »regula falsorum«, »regula falsi« über. Ist z. B. die Gleichung

$$ax + b = 0$$

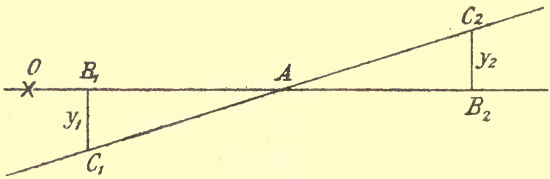
gegeben [76]), und sind z_1 und z_2 beliebige Zahlenwerte, setzt man ferner $az_1 + b = y_1$, $az_2 + b = y_2$, so ist, wie leicht zu sehen,

$$x = \frac{z_2\, y_1 - z_1\, y_2}{y_1 - y_2}.$$

Ibn Albanna benützt folgende schematische Darstellung zur Berechnung des Wertes von x:



Die geometrische Darstellung, welche für y_1 als negative Grösse einige Aehnlichkeit mit einer Wage hat, wäre für $OB_1 = z_1$, $OB_2 = z_2$, $B_1C_1 = y_1$, $B_2C_2 = y_2$, $OA = x$ folgende:



Hieraus ergibt sich ohne weiteres, dass

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = \frac{y_1}{y_2},$$

d. h. dass die Fehler der Substitutionen sich verhalten wie die Fehler der Resultate, und diesen Satz fand wahrscheinlich der erste Entdecker der Methode durch geometrische Betrachtungen ähnlicher Art.

Bei den Gleichungen zweiten Grads gibt *Alchwarizmî* zuerst eine rein mechanische Lösung (ohne negative Wurzeln, die zwar bekannt sind, aber nicht zugelassen werden), dann eine Probe durch geometrische Darstellung. Auch eine Untersuchung über die Anzahl der Lösungen wird angestellt. Im Falle

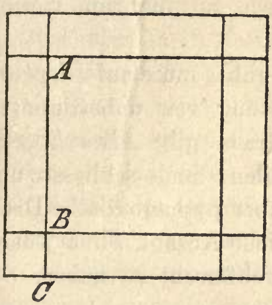
$$x^2 + c = bx \text{ oder } x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

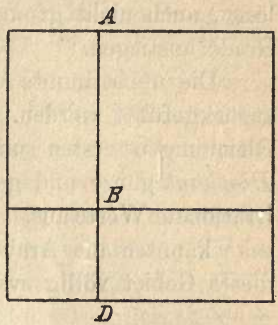
erhält *Alchwarizmî* zwei, eine oder keine Lösung, je nachdem

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c, \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c, \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$$

ist. Den geometrischen Nachweis für die Richtigkeit der Lösung einer Gleichung wie z. B. $x^2 + 2x = 15$ ($x = 3$) liefert er auf zweierlei Art, entweder durch eine vollkommen

symmetrische Figur oder mit Hilfe des Gnomons. Für $AB=x$, $BC=\frac{1}{2}$, $BD=1$ ist





im ersten Fall $x^2+4\,.\,\frac{1}{2}\,.\,x+4\,.\,(\frac{1}{2})^2=15+1$, $(x+1^2=16$; im zweiten hat man $x^2+2\,.\,1\,.\,x+1^2=15+1$. — Durch *Alkalsâdî* erfährt die Theorie der Gleichungen zweiten Grads insofern noch eine Erweiterung, als von ihm Gleichungen der Form $ax^{2n}\pm bx^n\pm c=0$ gelöst werden.

Gleichungen von höherem als dem zweiten Grad, wie sie den Arabern durch geometrische oder stereometrische Aufgaben in griechischen Mustern aufstiessen, wurden von ihnen nicht mehr rechnerisch, sondern nur noch geometrisch mit Hilfe der Kegelschnitte gelöst. Am meisten systematisch ist hier *Omar Alchaijami* [76]) vorgegangen, der folgende Gleichungen dritten Grads geometrisch löst:

$$r=x^3,\quad x^3\pm px^2=qx,\quad x^3+r=qx,\quad x^3\pm px^2\pm qx=r,$$
$$qx=x^3,\quad x^3+qx=px^2,\quad x^3\pm px^2=r,\quad x^3\pm px^2+r=qx,$$
$$px^2=x^3,\quad x^3\pm qx=r,\quad x^3+r=px^2,\quad x^3\pm px^2=qx+r.$$

Seine Ausdrucksweise ist dabei folgende:

»Ein Kubus und Quadrate sind gleich Wurzeln«;
»ein Kubus ist gleich Wurzeln, Quadraten und einer Zahl«, wenn die Gleichungen

$$x^3+px^2=qx,\quad x^3=px^2+qx+r$$

dargestellt werden sollen.

Alle binomischen Formen nennt *Omar* einfache Gleichungen,

die trinomischen und quadrinomischen aber zusammengesetzte Gleichungen. Letztere konnte *Omar* nicht mehr lösen, auch nicht geometrisch, wofern sie bis zum vierten Grade anstiegen.

Die unbestimmte Analytik der Araber muss auf *Diophant* zurückgeführt werden. Bei der Lösung von unbestimmten Gleichungen ersten und zweiten Grads gibt *Alkarchi* wie *Diophant* ganze und gebrochene Zahlen, und schliesst nur irrationale Werte aus. Von Sätzen über pythagoräische Dreiecke kannten die Araber eine ziemliche Anzahl, ohne jedoch dieses Gebiet völlig systematisch durchforscht zu haben.

C. Zweite Periode.

Bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts.

So lange die Pflege der Wissenschaften bei den westlichen Völkern fast ausschliesslich an die Klöster gebunden war, also vom 8. bis 12. Jahrhundert, kann von einer Förderung der allgemeinen Zahlenlehre nichts entdeckt werden. Wie in der gelehrten lateinischen Welt vom Ende des 5. Jahrhunderts ab, zählte man sieben freie Künste, das Trivium (Grammatik, Rhetorik, Dialektik) und das Quadrivium (Arithmetik, Geometrie, Musik, Astronomie) [78]. Allein erst arabischer Einfluss, der teils unmittelbar, teils durch Schriften wirkte, zeitigte in Italien, dann auch in Deutschland und Frankreich eine Blütezeit mathematischer Thätigkeit, deren Einfluss in der ganzen Litteratur jener Zeit ein hervorragender war. Findet doch *Dante* im vierten Gesang der Göttlichen Komödie mitten unter den Leuten »stillen, ernsten Blicks, in ihren Zügen hohe Würde tragend«, einen *Euklid* und *Ptolemäus*, einen *Hippokrates* und *Avicenna*.

Es entstanden als weitere Entwicklung von berühmten Kloster-, Dom- oder Stiftsschulen, oder auch in seltenen Fällen unabhängig von ihnen, die ersten Hochschulen [42]) zu Paris, Oxford, Bologna, Cambridge, welche sich

im Lauf des 12. Jahrhunderts die einzelnen Fakultäten angegliedert hatten und vom Anfang des 13. Jahrhunderts an als »Studia generalia« berühmt wurden[111]). Bald erwuchsen auch Hochschulen in Deutschland (Prag 1347, Wien 1365, Heidelberg 1385, Köln 1388, Erfurt 1392, Leipzig 1409, Rastatt 1419, Greifswalde 1456, Ingolstadt 1472, Tübingen und Mainz 1477 gegründet), auf welchen der mathematische Unterricht lange Zeit nur ein Anhängsel der philosophischen Lehrthätigkeit bildete. Als den ersten Fachprofessor der Mathematik an einer deutschen Hochschule hat man *Johann von Gmunden* anzusehen, der vom Jahr 1420 ab in Wien nicht mehr, wie dies sonst üblich war, über alle philosophischen, sondern nur noch über mathematische Fächer Vorlesungen hielt.

1. Allgemeine Arithmetik.

Noch *Fibonacci* schreibt mathematische Regeln in Wörtern oder stellt sie durch Strecken dar. Bei *Pacioli* dagegen, der seinem Vorgänger an rechnerischer Erfindungsgabe weit nachsteht, finden sich für plus, minus, radix oder res die Abkürzungen *.p.*, *.m.*, R. Schon zehn Jahre vor *Luca Pacioli*, nemlich im Jahr 1484, hatte *Nicolas Chuquet*, wahrscheinlich auf den Forschungen *Oresmes* fussend, ein Werk veröffentlicht, in welchen nicht bloss die Zeichen $\bar{p}$ und $\bar{m}$ (für plus und minus), sondern auch Ausdrücke wie

$$R^4.10,\ R^2.17 \text{ für } \sqrt[4]{10},\ \sqrt{17}$$

neben der Cartesischen Exponentenbezeichnung, der sogenannten *Harriot'schen* Zeichenregel und den Ausdrücken »equipollence«, »equipollent« (für Aequivalenz und aequivalent) auftraten*).

Die eigentliche Zeichenarithmetik bildete sich auf deutschem Boden aus. Für die deutsche allgemeine Arith-

*) A. Marre in Bonc. Bull. XIII. (Fortschr. 1881. S. 8.)

metik und Algebra, für die »deutsche Coss« sind die Zeichen + und — für plus und minus charakteristisch [114]); sie waren allgemein im Gebrauch, als man in der italienischen Schule noch lange $\bar{p}$ und $\bar{m}$ schrieb. Das älteste Vorkommen dieser Zeichen ist in einer Handschrift der Wiener Bibliothek (»Regule Cose vel Algobre«) aus der Mitte des 15. Jahrhunderts nachgewiesen. Im Anfang des 17. Jahrhunderts steht bei *Reymers* und *Faulhaber* ÷, bei *Peter Roth* –:– als Minuszeichen.

Im 13. und 14. Jahrhundert wurde bei den Italienern in Anlehnung an die Araber der Verlauf einer Rechnung ganz in Worten dargestellt. Jedoch bildeten sich nach und nach Akürzungen heraus, und *Luca Pacioli* kennt solche für die neunundzwanzig ersten Potenzen der unbekannten Grösse. In seiner Zusammenstellung steht für die absolute Zahl, für x, x^2, x^3, x^4 .... immer *numero* oder *n°*, *cosa* oder *co*, *censo* oder *ce*, *cubo* oder *cu*, *censo de censo* oder *ce . ce*, *primo relato* oder *p° . r°*, *censo de cubo* oder *ce . cu* .....

Die Deutschen benützten Zeichen eigener Erfindung. *Rudolff* und *Riese* benennen die absolute Zahl und die Potenzen der Unbekannten folgendermassen: Dragma, in der geschriebenen Abkürzung φ; Radix (oder Coss) hat das Zeichen x (ein r mit einem Schnörkel), Zensus 𝔷, Cubus ein c mit oben angehängtem langem l-förmigem Schnörkel (hier und im folgenden einfach mit c wiedergegeben), Zensus de Zensu (Zensdezens) 𝔷𝔷, Sursolidum ß oder 𝔰ß, Zensikubus 𝔷 c, Bissursolidum 𝔟𝔦ß oder 𝔅ß, Zensus Zensui de Zensu (Zenszensdezens) 𝔷𝔷𝔷, Cubus de Cubo c c.

Ueber die Herkunft des x der Mathematiker stehen sich zwei Ansichten gegenüber. Nach der einen ist das Zeichen x ein *r* (radix), das nach und nach mit einem Schnörkel versehen immer mehr dem x ähnlich wurde, während die ursprüngliche Bedeutung in Vergessenheit geriet, so dass es ein halbes Jahrhundert nach *Stifel* von allen Rechnern als x gelesen wurde [114]). Die andere Erklärung [23]) knüpft daran an, dass es in Spanien Regel ist, ein arabisches š durch ein

lateinisches x überall da zu ersetzen, wo es sich um Wiedergabe ganzer Wörter und Sätze handelt, z. B. um die Grösse $12x$, im Arabischen ش 12, gleich 12 xai (eigentlich 12 šai). Es wäre so das x der Mathematiker eine Abkürzung des arabischen šai = xai als Bezeichnung der Unbekannten.

Von den älteren Cossisten[114]) werden die im obigen erwähnten Abkürzungen ohne Erklärung eingeführt; *Stifel* dagegen fühlt das Bedürfnis, seinen Lesern die nötigen Aufklärungen zu geben. Das Wort »Wurzel« (für die erste Potenz der Unbekannten) erklärt er mit Hilfe der geometrischen Progression, »weil alle folgenden Glieder aus dem ersten hervorwachsen wie aus einer Wurzel«, setzt für x^0, x^1, x^2, x^3, ... die Bezeichnungen $1, 1\,x, 1\,\mathfrak{z}, 1\,c, 1\,\mathfrak{zz}, \ldots$ und nennt dies »cossische Zahlen«, die man ins Unendliche fortsetzen könne, indem jeder eine bestimmte Rangzahl (»exponens«) zukomme. In der deutschen Ausgabe von *Rudolffs* Coss schreibt *Stifel* »die Cossische progresz« bis zur siebzehnten Potenz fortschreitend erst in der schon angegebenen Weise, dann aber auch folgendermassen:

$$\overset{0}{1}\ .\ \overset{1}{1\mathfrak{A}}\ .\ \overset{2}{1\mathfrak{AA}}.\quad \overset{3}{1\mathfrak{AAA}}.\quad \overset{4}{1\mathfrak{AAAA}}\quad \text{etc.}$$

Dasselbe schreibt *Stifel* noch mit den Buchstaben $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Die grösste Annäherung an unsere heutige Bezeichnung findet sich bei *Bürgi* und *Reymers*, wo mit Hilfe der »Exponentes« oder »Charakteristici« das Polynom

$$8x^6 + 12x^5 - 9x^4 + 10x^3 + 3x^2 + 7x - 4$$

so dargestellt wird:

$$\overset{\text{VI}}{8} + \overset{\text{V}}{12} - \overset{\text{IV}}{9} + \overset{\text{III}}{10} + \overset{\text{II}}{3} + \overset{\text{I}}{7} - \overset{0}{4}.$$

Für x, x^2, x^3, x^4, ... steht bei *Scheubel pri., sec., ter., quar., quin.*, bei *Ramus l, q, c, bq, s* als Abkürzung von latus, quadratus, cubus, biquadratus, solidus.

Das Produkt $(7x^2-3x+2)\,(5x-3) = 35x^3-36x^2+19x-6$ stellt sich in seiner Entwicklung bei *Grammateus*, *Stifel* und *Ramus* folgendermassen dar:

Grammateus:

$$\begin{array}{rrrr} & 7\,x. & -\,3\,pri. & +\,2\,N \\ \text{durch} & & 5\,pri. & -\,3\,N \\ \hline 35\,ter. & -15\,x. & +\,10\,pri. & \\ & -21\,x. & +\;\;9\,pri. & -6N \\ \hline 35\,ter. & -36\,x. & +\,19\,pri. & -6N \end{array}$$

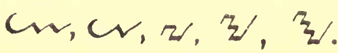
Stifel:

$$\begin{array}{rrrr} & 7\,\mathfrak{z} & -\,3\,x & +\,2 \\ & & 5\,x & -\,3 \\ \hline 35\,c & -15\mathfrak{z} & +\,10x & \\ & -21\mathfrak{z} & +\;\;9x & -\,6 \\ \hline 35\,c & -36\mathfrak{z} & +\,19x & -6 \end{array}$$

Ramus:

$$\begin{array}{rrrr} & 7\,q & -\;\;3\,l & +\;\;2 \\ & & 5\,l & -\;\;3 \\ \hline 35\,c & -\,15\,q & -\,10\,l & \\ & -\,21\,q & +\;\;9\,l & -\,6 \\ \hline 35\,c & -\,36\,q & +\,19\,l & -\,6. \end{array}$$

Für das Wurzelausziehen erfand die deutsche Coss ebenfalls schon im 15. Jahrhundert ein besonderes Symbol. Erst stand •4 statt $\sqrt{4}$; dieser der Zahl vorgesetzte Punkt wurde bald durch einen angehängten Strich ausgezogen. Schon *Riese* schreibt einfach $\surd 4$. Bei *Rudolff* findet sich $\surd 4\bullet$ für $\sqrt{4}$. Den ersten Schritt zu einer allgemeineren Auffassung der Wurzelgrössen macht *Stifel* in seiner »Arithmetica integra«, wo die zweite, dritte, vierte, fünfte Wurzel aus sechs bezeichnet wird mit $\surd\mathfrak{z}6$, $\surd c6$, $\surd\mathfrak{zz}6$, $\surd\beta 6$, während anderswo als Wurzelzeichen die Formen vorkommen:



Diese Zeichen, von welchen die zwei ersten bei *Rudolff*, die drei andern in einem Werke *Stifels* auftreten, bedeuten die dritte und vierte, beziehungsweise die zweite, dritte und vierte Wurzel aus der Zahl, welcher sie vorgesetzt wurden.

Ueber die Rechnung mit Wurzelgrössen gibt *Rudolff* einige Regeln, aber ohne Beweise. Eine irrationale Zahl heisst bei ihm wie bei *Fibonacci* »numerus surdus«. Aufgeführt finden sich Sätze wie

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm \sqrt{4\,ab}}, \quad \sqrt{a^2 c} + \sqrt{b^2 c} = \sqrt{(a+b)^2 \cdot c},$$

$$\frac{x}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{x(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

Stifel geht auf die Irrationalitäten mit besonderer Vorliebe ein, und bezieht sich sogar auf die Betrachtungen *Euklids*, wahrt aber bei seinen Entwicklungen stets eine wohlbegründete Selbständigkeit. Von Irrationalitäten unterscheidet *Stifel* Haupt- und Nebenarten. Zu den ersteren zählen die einfachen Irrationalen oder Medialen von der Form $\sqrt[n]{a}$, die zusammengesetzten Irrationalen:

$$\sqrt{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}10 + \sqrt{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}6,\ 4 + \sqrt{\mathfrak{z}}6,\ \sqrt{\mathfrak{z}}12 + \sqrt{c}12,$$

die zusammengesetzten Radikale:

$$\sqrt{\mathfrak{z}} \cdot \sqrt{\mathfrak{z}}6 + \sqrt{\mathfrak{z}}8 = \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{8}};\ \sqrt{\mathfrak{z}} \cdot 5 + \sqrt{\mathfrak{z}}5 = \sqrt{5 + \sqrt{5}},$$

die gleichsam zusammengesetzten Irrationalen $(\sqrt{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}10 - \sqrt{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}6)$ und die gleichsam zusammengesetzten Radikale:

$$\sqrt{\mathfrak{z}} \cdot \sqrt{\mathfrak{z}}6 - \sqrt{\mathfrak{z}}8 = \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{8}}.$$

Nebenarten von irrationalen Grössen sind nach *Stifel* Ausdrücke wie

$$\sqrt{\mathfrak{z}}2 + \sqrt{\mathfrak{z}}3 + \sqrt{\mathfrak{z}}5,\ \sqrt{\mathfrak{z}}2 + \sqrt{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}4 + \sqrt{c}3,$$
$$\sqrt{\mathfrak{z}\mathfrak{z}} \cdot \sqrt{\mathfrak{z}}6 + 2 \,.\, - \,.\, \sqrt{\mathfrak{z}c} \cdot \sqrt{c}8 + \sqrt{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}12$$
$$= \sqrt[4]{\sqrt{6}+2} - \sqrt[6]{\sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{12}}.$$

Die Kenntnis der negativen Grössen hat *Fibonacci* offenbar von den Arabern erhalten, aber wie sie lässt er negative Grössen als Wurzeln einer Gleichung nicht zu. *Pacioli* spricht die Regel aus: minus . minus gibt plus, wendet sie aber nur auf die Entwicklung von Ausdrücken der Form $(p - q)$ $(r - s)$ an. In derselben Anschauung bewegt sich *Cardano*; er kennt negative Wurzeln einer Gleichung, nennt sie aber aestimationes falsae oder fictae und legt ihnen keine selbständige Bedeutung bei. Bei *Stifel* heissen die negativen Grössen numeri absurdi. Erst *Harriot* betrachtet negative Grössen für sich und lässt sie die eine Seite einer Gleichung bilden. Die Rechnung mit negativen Grössen beginnt also eigentlich erst im 17. Jahrhundert. Mit den irrationalen Zahlen verhält es sich ähnlich; erst *Stifel* rechnet sie unter die eigentlichen Zahlen.

Von imaginären Grössen ist kaum die Rede. *Cardano* beweist gelegentlich:

$$(5+\sqrt{-15})\,.\,(5-\sqrt{-15}) = 40.$$

Bombelli geht wesentlich weiter. Er spricht sich zwar nicht aus über das Wesen der imaginären Grössen, von denen er $+\sqrt{-1}$ »piu di meno«, $-\sqrt{-1}$ »meno di meno« nennt, wohl aber gibt er Regeln zur Ausrechnung von Ausdrücken der Form $a+b\sqrt{-1}$, wie sie bei der Lösung der Gleichung dritten Grads auftreten.

In der Potenzrechnung war die italienische Schule frühzeitig ziemlich weit gelangt. Schon *Nicole Oresme*[47]) stellt die Rechnung mit gebrochenen Exponenten auf; in seiner Schreibweise ist

$$\tfrac{1}{2}\,.\,1^{p}\tfrac{2}{3} = (1\tfrac{2}{3})^{\frac{1}{2}},\quad \tfrac{1}{4}\;.\;2^{p}\tfrac{1}{2} = (2\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{4}};$$

er kennt die Formeln:

$$\alpha^{\frac{m}{n}} = (\alpha^m)^{\frac{1}{n}},\quad \alpha^{\frac{1}{m}}\,.\,\beta^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\alpha^n}{\beta^m}\right)^{\frac{1}{mn}}.$$

In den Umformungen von Wurzeln hat *Cardano* den ersten wichtigen Schritt vorwärts gethan, indem er

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = p+\sqrt{q},\quad \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} = p-\sqrt{q},$$

also $\sqrt[3]{a^2-b} = p^2-q = c$, $a^2-b = c^3$ setzt. *Bombelli* erweitert diese Bemerkung und setzt

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}} = p+\sqrt{-q},\quad \sqrt[3]{a-\sqrt{-b}} = p-\sqrt{-q},$$

woraus $\sqrt[3]{a^2+b} = p^2+q$ folgt. Er findet im Zusammenhang mit der Gleichung $x^3 = 15x+4$ folgendes:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1} + 2-\sqrt{-1} = 4.$$

In diesem Fall wird nämlich

$p^2+q=5$, $(p+\sqrt{-q})^3 = 2+\sqrt{-121}$, $(p-\sqrt{-q})^3 = 2-\sqrt{-121}$, durch Addition $p^3-3pq=2$, und mit $q=5-p^2$ ferner

$$4p^3-15p=2,\ \text{also}\ p=2\ \text{und}\ q=1.$$

Das zahlenmässige Quadrat- und Kubikwurzelausziehen

erfolgt schon von *Grammateus* nach arabischer oder vielmehr indischer Weise; im Quadratwurzelausziehen wird zu Zwecken der Klasseneinteilung über die 1., 3., 5., ... Ziffer, von rechts nach links gerechnet, je ein Punkt gemacht. Das Wurzelziehen dehnt *Stifel* ziemlich weit aus; er stellt, allerdings einzig zu diesem Zweck, eine Tafel der Binominalcoëfficienten bis $(a+b)^7$ auf, in welcher z. B. die Zeile für $(a+b)^4$ heisst:

$$1_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}} \quad . \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad .$$

Die Theorie der Reihen geht in dieser Periode über das, was den Arabern geläufig war, nicht hinaus. *Peurbach* summiert die arithmetische und geometrische Reihe. *Stifel* betrachtet die Reihe der natürlichen, der geraden und ungeraden Zahlen, und leitet aus ihnen Potenzreihen her; von solchen Sätzen kennt er durch *Cardano* das Theorem, dass $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ ist. Die geometrischen Reihen kommen bei *Stifel* in einer Anwendung vor, welche sich in *Euklid* bei der Lehre von den Medialen nicht findet [114]). Bekanntlich werden zwischen zwei Grössen a und b n geometrische Mittel durch die Gleichungen

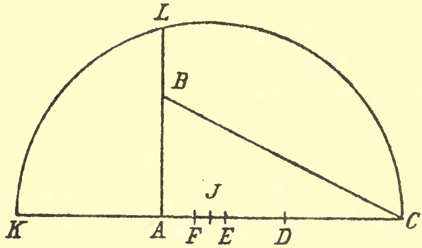
$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots . = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{b} = q$$

eingeschaltet, wo $q = \sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}$ ist. *Stifel* interpoliert fünf geometrische Mittel zwischen 6 und 18 auf folgende Art: $\frac{18}{6} = 3$;

1	3	9	27	81	243	729
$\sqrt{\mathfrak{z}c1}$	$\sqrt{\mathfrak{z}c3}$	$\sqrt{\mathfrak{z}c9}$	$\sqrt{\mathfrak{z}c27}$	$\sqrt{\mathfrak{z}c81}$	$\sqrt{\mathfrak{z}c243}$	$\sqrt{\mathfrak{z}c729}$
6	$\sqrt{\mathfrak{z}c139968}$	$\sqrt{c648}$	$\sqrt{\mathfrak{z}108}$	$\sqrt{c1944}$	$\sqrt{\mathfrak{z}c11337408}$	18

wobei die letzte Zeile aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit 6 erhalten wird. — Diese Lösungsart wendet *Stifel* zur Würfelverdopplung an und wählt als Kante des gegebenen Würfels 6; dann sind zwischen 6 und 12 drei geometrische Mittel einzuschalten, und da

$q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, so wird die Kante des gesuchten Würfels $x = 6\sqrt[3]{2} = \sqrt{c432}$. Diese Länge wird von *Stifel* elementargeometrisch auf folgende Weise konstruiert: In dem recht-



winkligen Dreieck ABC mit der Hypotenuse BC sei $AB=6$, $AC=12$; mache $AD=DC$, $AE=ED$, $AF=FE$, $FJ=JE$, $JK=JC=JL$, AK ist das erste, AL das zweite geometrische Mittel zwischen 6 und 12. — Diese Konstruktion, welche *Stifel* für vollkommen richtig hält, ist eine Näherungskonstruktion, da $AK=7{,}5$ statt $6\sqrt[3]{2} = 7{,}56$, $AL = 3\sqrt{10} = 9{,}486$ statt $\sqrt[3]{4} = 9{,}522$ wird.

Auch einfache zahlentheoretische Dinge sind *Stifel* bekannt, so Sätze über vollkommene und Diametralzahlen (5 ist Diametralzahl zu 3 und 4, weil $3^2 + 4^2 = 5^2$) und über Zauberquadrate.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Diese magischen Quadrate sind schachbrettartige Figuren, in welche die Glieder einer arithmetischen Reihe so eingeordnet werden, dass die Summe der in einer Zeile, Reihe oder Diagonale stehenden Zahlen immer dieselbe wird. Ein magisches Quadrat mit ungerader Stellenzahl, das leichter als ein solches mit gerader Felderzahl zu konstruieren ist, kann man folgendermassen erhalten: »Man setze die 1 unter die mittelste Zelle und die übrigen Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge diagonal in die leeren Felder. Stösst man auf eine schon besetzte Zelle, so gehe man in senkrechter Richtung um zwei Felder herab« [116]. Vielleicht sind die magischen Quadrate schon bei den Indern bekannt gewesen; jedoch gibt es keine sicheren Bürgschaften dafür [77]. *Moschopulus* ist der erste bekannte Autor, der über Zauberquadrate geschrieben hat. Er gibt zur Herstellung dieser Gebilde bestimmte Regeln, welche viel später durch *Lahire* und *Mollweide* weitere Verbreitung gefunden haben. — Für das Mittelalter waren die Zauberquadrate ein Stück der sehr verbreiteten Zahlenmystik. Erst *Stifel* betrachtete sie vom Standpunkt seiner Wissenschaft aus; aber weder er noch *Adam Riese* vermochten ein einfaches Verfahren zur Aufstellung der magischen Quadrate anzugeben. Man darf jedoch annehmen, dass einigen deutschen Mathematikern gegen Ende des 16. Jahrhunderts (z. B. dem Nürnberger Rechenmeister *Peter Roth*) solche Regeln bekannt waren [39]. Im Jahr 1613 veröffentlichte *Bachet* in seinen »Problêmes plaisants« eine allgemeine Methode für die Quadrate von ungerader Seitenzahl, gestand aber ausdrücklich ein, dass es ihm nicht gelungen sei, die Aufgabe für die geraden Seitenzahlen zu lösen [77]. Erst *Frénicle* kam wesentlich über *Bachet* hinaus. Er gab (1693) Regeln für ungerade und gerade Quadrate; ja er erfand sogar solche Quadrate, welche nach Streichung der äusseren Reihen magische Quadrate bleiben. — Die früher zerstreuten Regeln sammelte *Mollweide* 1816 in einer Schrift (de quadratis magicis), welche sich durch einfache und wissenschaftlich-übersichtliche Darstellung auszeichnet. Neuere Arbeiten rühren her von *Hugel* (Ansbach 1859), von *Pessl* (Amberg 1872), der einen magischen Zylinder betrachtet, und von *Thompson* (Quart. Journ. X), durch dessen Regeln das Zauberquadrat mit der Seitenzahl pn aus dem von der Seite n abgeleitet wird [39].

2. Algebra.

Gegen Ende des Mittelalters stellt sich dem gemeinen Rechnen (Ars minor) die Ars major, Arte maggiore, Algebra oder Coss gegenüber [114]. Die Italiener nennen die Lehre von

den Gleichungen entweder einfach Algebra wie die Araber, oder auch ars magna, ars rei et census (seit *Leonardo* sehr gebräuchlich und bei *Regiomontanus* eingeführt), la regola della cosa (cosa = causa), ars cossica oder regula cosae. Die deutschen Algebraiker des 15. und 16. Jahrhunderts schreiben coss oder regula coss, auch Algebra, oder, wie die Griechen, Logistik. *Viète* sagt arithmetica speciosa, *Reymers* arithmetica analytica, und im Abschnitt von den Gleichungen speziell »von der Aequation«. Die Darstellungsweise der Gleichungen entwickelt sich allmählich zur modernen Gestalt. Das »Gleichsein« wird überall, auch bei allen Cossisten, durch Worte ausgedrückt; erst Mitte des 17. Jahrhunderts kommt ein bebesonderes Zeichen dafür in allgemeineren Gebrauch. Beispiele der verschiedenen Darstellung von Gleichungen finden sich im folgenden:

Cardano: Cubus $\bar{p}$ 6. rebus aequalis 20, $x^3 + 6x = 20$;

Viète: $1C - 8Q + 16N$ aequ. 40, $x^3 - 8x^2 + 16x = 40$;

Regiomontanus:
16 census et 2000 aequales 680 rebus, $16x^2 + 2000 = 680x$;

$$\begin{array}{lllllllll} & \text{XXVIII} & \text{XII} & \text{X} & \text{VI} & \text{III} & \text{I} & 0 \\ \textit{Reymers}: & 1\,gr & 65532 & +18 \div & 30 \div & 18 & +12 \div & 8, \end{array}$$

$$x^{28} = 65532x^{12} + 18x^{10} - 30x^6 - 18x^3 + 12x - 8;$$

Descartes:

$$\begin{array}{ll} z^2 \propto az - bb, & z^2 = az - b^2; \\ y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y * \propto 0, & y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0; \\ x^6 * * * * - bx \propto 0, & x^6 - bx = 0; \\ x^5 * * * * - b \propto 0, & x^5 - b = 0; \end{array}$$

Hudde: $x^3 \propto qx \,.\, r$, $x^3 = qx + r$.

Zur Zeit *Eulers* hatte sich die letzte Umgestaltung in die moderne Form schon vollzogen.

Die Gleichungen ersten Grads bieten keine Veranlassung zu Bemerkungen; doch möge die besondere Gestalt der Proportion bei *Grammateus* und *Apian*[31]) hervorgehoben werden. Ersterer schreibt: »Wie sich hadt a zum b, also hat sich c zum d«, und letzterer setzt

$$4 - 12 - 9 - 0 \text{ für } \tfrac{4}{12} = \tfrac{9}{x}.$$

Die Gleichungen zweiten Grads löst *Fibonacci* ganz in der Weise der Araber. *Cardano* spricht von zwei Wurzeln einer quadratischen Gleichung, auch wenn eine derselben negativ ist; er betrachtet sie aber nicht als eine wirkliche Lösung. *Rudolff* kennt nur positive Wurzeln, und *Stifel* sagt ausdrücklich, dass mit Ausnahme des Falls der quadratischen Gleichung mit zwei positiven Wurzeln jede Gleichung nicht mehr als eine Wurzel haben könne. Im allgemeinen wird bei der Ausrechnung so verfahren, wie es *Grammateus*[31]) in dem Beispiel $12x + 24 = 2\frac{10}{49}x^2$ verlangt: »Thue also: teile $24\,N$ durch $2\frac{10}{49}$ sec., so kommen $10\frac{8}{9}$ a ($10\frac{8}{9} = a$). Teile auch 12 pri. durch $2\frac{10}{49}$ sec., so entspringen $5\frac{4}{9}\,b$ ($5\frac{4}{9} = b$). Multipliziere das Halbteil b in sich, so wird $\frac{2401}{324}$, zu dem addiere a als $10\frac{8}{9}$, so werden gefunden $\frac{5929}{324}$, aus welchem radix quadrata $\frac{77}{18}$, das addiere zum halben Teil b als $\frac{49}{18}$, werden 7 die Zahl 1 pri. — Proba. Sprich 12 mal 7 ist $84\,N$, dazu addiere $24\,N$, werden $108\,N$. Also sollen $2\frac{10}{49}$ sec. gemultipliziert durch 49 auch machen $108\,N$«.

Diese »deutsche Coss«[114]) ist wohl zwischen 1520 und 1530 durch *Hans Bernecker* zu Leipzig und *Hans Conrad* zu Eisleben gepflegt worden, jedoch hat man von diesen beiden Rechnern keine Aufzeichnungen gefunden. Die Wiener Hochschule gab *Grammateus* die Anregung, im Jahr 1518 das erste deutsche Lehrbuch der Algebra zu veröffentlichen unter dem Titel: »Eyn new kunstlich behend vnd gewiss Rechenbüchlin | vff alle Kauffmannschafft. Nach Gemeynen Regeln de tre. Welschen practic. Regeln falsi. Etlichen Regeln Cosse. . Buchhalten . . Visier Ruthen zu machen.« *Adam Riese*, der

1518 sein Rechenbuch herausgegeben hatte, brachte auch 1524 »die Coss« handschriftlich fertig; sie blieb Manuscript und wurde erst 1855 zu Marienberg wieder aufgefunden. — Vollen Beifall errang die 1525 in Strassburg gedruckte Coss von *Christof Rudolff*. Diese mit vielen vollständig gelösten Beispielen versehene Schrift führt sich folgendermassen ein: »Behend vnd Hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre | so gemeinicklich die Coss genennt werden. Darinnen alles so treulich an Tag geben | das auch allein ausz vleissigem Lesen on allen mündtlichē vnterricht mag begriffen werden. Hindangesetzt die meinung aller dere | so bisher vil vngegründten regeln angehangen. Einem jeden liebhaber diser kunst lustig vnd ergetzlich Zusamen bracht durch *Christoffen Rudolff* von Jawer.«

Das Hauptwerk der deutschen Coss ist *Michael Stifels* »Arithmetica integra«, gedruckt zu Nürnberg 1544. In diesem Buche werden neben der gewöhnlicheren Rechnung nicht nur die Irrationalen ausführlich behandelt, sondern es finden sich auch Anwendungen der Algebra auf die Geometrie. Noch erschien auch von *Stifel* im Jahr 1553 »die Cosz *Christoffs Rudolffs* Mit schönen Exempeln der Cosz Gebessert vnd sehr gemehrt«, mit reichhaltigen Anhängen eigener Bearbeitung, welche zumeist auch eine Konzentration des Inhaltes der Coss bezweckten. In berechtigt selbstbewusster Weise hebt *Stifel* hervor: »Denn es ist mein fleiss in sollichen sachen | das ich (wa ich kan) auss vielfeltigkeit mache ein einfeltigkeit. Also hab ich auss vilem Regeln der Coss ein einige Regel gemacht | vnd auss vielem extrahiren auch vast ein gleichförmige weise gestellet vnzalbarlichen extrahirens.«

Stifels Schriften wurden von späteren mathematischen Autoren der verschiedensten Länder reichlich ausgebeutet, häufig ohne Nennung seines Namens. Es geschah dies in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts von den Deutschen *Christof Clavius* und *Scheubel*, den Franzosen *Ramus*, *Peletier*

und *Salignac*, dem Niederländer *Menher* und von dem Spanier *Nunez*, so dass man wohl sagen kann, dass der Geist der deutschen Coss am Ende des 16. und Anfang des 17. Jahrhunderts mit alleiniger Ausnahme Italiens die Algebra der europäischen Länder beherrschte.

Ein hervorragendes Interesse beansprucht die Geschichte der rein arithmetischen Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grads, welche auf italienischem Boden gelang. Den ersten Vorstoss machte *Fibonacci* an der Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, die er zwar nur durch Annäherung lösen konnte; aber sie wurde ihm Veranlassung zu beweisen, dass der Verschwindungswert von x nicht durch Quadratwurzeln allein dargestellt werden könne, selbst wenn letztere in zusammengesetzter Form, etwa als

$$\sqrt{\sqrt{m} \pm \sqrt{n}}$$

gewählt würden. Die erste vollständige Lösung der Gleichung $x^3 + mx = n$ rührt von *Scipione Ferro* her, ist aber verloren gegangen[47]. Der zweite Entdecker ist nicht *Cardano*, sondern *Tartaglia*; er stellte am 12. Februar 1535 für die Gleichung $x^3 + mx = n$ die seither unter dem Namen seines Nebenbuhlers so berühmt gewordene Formel auf. Im Jahre 1541 war *Tartaglia* imstande, jede beliebige Gleichung dritten Grads zu lösen. *Cardano* lockte 1539 seinen Gegner *Tartaglia* nach Mailand in sein Haus, und bestürmte ihn so lange mit Bitten, bis letzterer ihm sein Geheimnis unter dem Siegel der Verschwiegenheit anvertraute. *Cardano* wurde wortbrüchig; er veröffentlichte *Tartaglia's* Lösung im Jahr 1545 in seiner Ars magna, allerdings nicht ohne den Namen des Entdeckers zu nennen. *Cardano* hatte auch die Genugthuung, die Lösung der Gleichung vierten Grads, welche seinem Schüler *Ferrari* gelungen war, ebenfalls in seiner Ars magna den Zeitgenossen kundgeben zu dürfen. Das Verdienst *Bombelli's* war es, die Wurzeln der

Gleichung dritten Grads im sogenannten irreducibeln Fall durch Umformung der Irrationalitäten (s. Seite 78) in der einfachsten Gestalt darzustellen. Von den deutschen Rechnern ist es *Rudolff*, der auch einzelne Gleichungen dritten Grads löst, ohne sich über den eingeschlagenen Weg zu äussern. *Stifel* ist schon in den Stand gesetzt, über die »cubiccoss«, d. h. die Lehre von den Gleichungen dritten Grads aus *Cardano's* Werk kurz zu berichten. Die erste vollständige Darlegung der *Tartaglia'schen* Lösung von Gleichungen dritten Grads rührt von *Faulhaber* (1604) her.

Die älteren Cossisten [114]) hatten Gleichungen ersten, zweiten, dritten und vierten Grads (so weit sie sich nur durch Quadratwurzeln lösen lassen) zu einer Tafel mit 24 verschiedenen Formen geordnet. Das eigentümliche Gewand dieser »Regeln«, d. h. der Gleichungen mit ihren Lösungen, lassen folgende Beispiele (aus *Riese*) erkennen:

»Die erste Regell Ist wann Radix vergleicht wird Numero oder Dragma genannt, sol numerus in radicem geteylt werden, was dan ausz solcher teylung komen wirtt, musz berichten die Frag.«

$$(ax = b \text{ gibt } x = \tfrac{b}{a}).$$

»Die Sechzehende Regel Ist so vurgleicht wirt, ʒ dem c vnd ʒʒ, so teyl ab die minstenn Zwei durch ʒʒ alsz ʒ vnd c darnach medir c, fure denn halben Teil in sich, das Produkt addir zum ʒ, extrahir radicem quadrati Vnd nim von solchm den halbenn teyl des c, so hastu berichtigung der frag.«

$$(ax^4 + bx^3 = cx^2,\ ax^2 + bx = c,\ x = \sqrt{(\tfrac{b}{2})^2 + c} - \tfrac{b}{2}).$$

Die vierundzwanzig Formen der älteren Cossisten fasst *Riese* in »acht equationes« zusammen, aber über die Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel ist er noch nicht ganz im Klaren. Erst *Stifel*, der diese acht Gleichungen nur als eine einzige gelten lässt, sagt ausdrücklich, dass eine Gleichung zweiten

Grads nie mehr als zwei Lösungen haben könne; diese stellt er allerdings nur für den Fall $x^2 = ax - b$ auf. — Um vorliegende Gleichungen auf eine der acht Formen *Rieses* zu reduzieren, berichtet *Rudolff* von »vier Cautelen«, aus denen deutlich zu ersehen ist, welche Mühe es kostete, die Coss Schritt für Schritt weiter zu entwickeln. Hier folgt als Beispiel

»Die erst cautel. Wann in vergleichung zweier zalen | bey der einen gefunden würt ein quantität | bei der andern auch eine der vorigen im Namen gleich. Alszdann (angesehen die zeichen + vn —) musz eine | ausz den gleich benenten quantitäten | addiert oder subtrahirt werdē von je einer der vergleichten zalen in sunderheit . . . das zu vollbringen hab achtung das + zu subtrahiren vnd das — zu addiren.«

(Aus $5x^2 - 3x + 4 = 2x^2 + 5x$ folgt $3x^2 = 8x - 4$).

Die ersten Beispiele von Gleichungen mit mehreren Unbekannten trifft man bei *Rudolff*, der sie gelegentlich behandelt. Auch hier geht *Stifel* entschieden weiter als seine Vorgänger. Ausser der ersten Unbekannten $1x$ führt er $1A$, $1B$, $1C$,... als »secundae radices« oder weitere Unbekannte ein und gibt Andeutungen über die durch Ausführung der Grundoperationen notwendig werdenden neuen Bezeichnungen, wie $8xA$ $(= 8xy)$, $1A\mathfrak{z}$ $(= y^2)$ u. a. m.

Cardano, dessen Name durch sein selbstsüchtiges Spiel im Verkehr mit *Tartaglia* in ein nicht günstiges Zwielicht gerückt worden ist, hat dennoch unzweifelhafte Verdienste, namentlich um die angenäherte Lösung von Gleichungen höheren Grads nach der Regula falsi, die er Regula aurea nennt. Auf dieser Bahn ging *Viète* weiter, indem er für algebraische Gleichungen beliebig hohen Grads eine Annäherungsmethode entwickelte, deren Erfindung gewöhnlich *Newton* zugeschrieben wird. Mit solchen Annäherungsmethoden, namentlich der Regula falsi, beschäftigten

sich auch *Reymers* und *Bürgi* erfolgreich. Man kann daher sagen, dass am Anfang des 17. Jahrhunderts wirksame Methoden vorhanden waren, um die Werte der positiven reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen.

Die eigentliche Theorie der algebraischen Gleichungen geht in besonderer Weise auf *Viète* zurück. *Viète* kannte (unter der Voraussetzung nur positiver Wurzeln) die Beziehungen der Coëfficienten der Gleichungen zweiten und dritten Grads zu den Wurzeln; er machte ferner die überraschende Entdeckung, dass eine Gleichung fünfundvierzigsten Grads, welche aus trigonometrischen Entwicklungen hervorgegangen war, dreiundzwanzig Wurzeln besitze (er vernachlässigt bei dieser Abzählung den negativen Sinus). Auch in deutschen Schriften finden sich vereinzelt Angaben über die analytische Theorie der Gleichungen, wie z. B. *Bürgi* den Zusammenhang eines Zeichenwechsels mit einer Wurzel der Gleichung erkannt hat. So unbedeutend diese ersten Anklänge an neuere Theorien auch scheinen mögen — sie sind gewiss die Vorarbeiten für Ideen gewesen, welche die folgenden Zeiträume beherrschten.

D. Dritte Periode.

Von der Mitte des 17. Jahrhunderts bis zur Gegenwart.

Als äusseres Zeichen einer immer wirksameren Arbeit auf dem Boden der mathematischen Wissenschaften tritt an den Beginn dieser Periode die Gründung von Akademien und Königlichen Gesellschaften. Die älteste gelehrte Gesellschaft*), die Accademia dei Lincei, bildete sich auf Anregung eines römischen Privatmannes, des Fürsten *Cesi*, schon im Jahr 1603; ihr gehörte unter anderen berühmten Gelehrten auch *Galilei* an. Die Londoner Königliche Gesellschaft entstand 1665, die Pariser Akademie 1668, die zu Berlin 1700.

*) Fortschritte 1887, S. 11.

Mit der fortschreitenden Entwicklung der reinen Mathematik tritt der Gegensatz der Arithmetik, die es mit diskreten Grössen zu thun hat, zur eigentlichen Algebra, in welcher kontinuierliche Quantitäten auftreten, immer deutlicher hervor. Sowohl zahlentheoretische wie algebraische Untersuchungen erreichen mit der Zeit eine grossartige Ausdehnung.

Der mächtige Anstoss, den *Viète's* Entwicklungen gegeben hatten, wirkte namentlich in den Arbeiten *Harriot's* nach. Dieser gab, gestützt auf *Viète's* Sätze, in seiner »Artis analyticae praxis« vom Jahre 1631 eine Theorie der Gleichungen, in welcher auch die Bezeichnungsweise mannigfache Verbesserungen erfuhr. Von *Harriot* rühren die Zeichen $>$ und $<$ für »grösser« und »kleiner« her; er schrieb auch stets x^2 für xx, x^3 für xxx etc. Bei *Harriot* und *Oughtred* findet sich gleichzeitig das Zeichen $\times$ für »mal«, wofür *Descartes* einen Punkt setzt, während *Leibniz* 1686 die Multiplikation durch $\frown$ und die Division durch $\smile$ andeutet, obwohl schon in den Schriften der Araber der Quotient a dividiert durch b in den Formen $a — b$, a/b, oder $\frac{a}{b}$ auftritt. Die Schreibweise $a:b$ erscheint zuerst bei *Clairaut* in einem Werk, das nach seinem Tod im Jahr 1760 veröffentlicht wurde. *Wallis* verwendet 1655 das Zeichen ∞ für Unendlich. *Descartes* macht von der Schreibart a^n (für p o s i t i v e ganze Exponenten) umfassenden Gebrauch. *Wallis* erklärt die Ausdrücke x^{-n} und $x^{\frac{1}{n}}$ als gleichbedeutend mit $1:x^n$ und $\sqrt[n]{x}$; aber erst *Leibniz* und *Newton* erkennen die grosse Bedeutung einer zweckmässigen Zeichensprache und suchen dieselbe in ihrem Teil zu fördern.

Die Potenzen eines Binoms beschäftigten *Pascal* in einer Schrift vom Jahr 1653, welche »das arithmetische Dreieck« enthält, das allerdings, im wesentlichen wenigstens, schon mehr als 100 Jahre früher von *Stifel* angegeben worden war. Dieses arithmetische Dreieck ist eine Tafel der Binomialcoëfficienten in folgender Form:

1	1	1	1	1	1	. .
1	2	3	4	5	6	. .
1	3	6	10	15	21	. .
1	4	10	20	35	56	. .
1	5	15	35	70	126	. .
1	6	21	56	126	252	. .
.	.	.	.	.	.	. .
.	.	.	.	.	.	. .

so dass die $n$te von links unten nach rechts oben ziehende Diagonale die Coëfficienten der Potenz $(a+b)^n$ enthält. Dieselbe Tafel benützt *Pascal* zur Aufstellung der figurierten Zahlen und der Kombinationen einer gegebenen Anzahl von Elementen. Für den binomischen Satz gab *Vandermonde* 1764 einen elementaren Beweis, ebenso *Euler* in seiner »Anleitung zur Algebra« im Jahr 1770 für beliebige Exponenten.

Eine Reihe interessanter Forschungen, meist der zweiten Hälfte unseres Jahrhunderts angehörig, hat sich mit dem Wesen der Zahl und mit Erweiterungen des Zahlbegriffs beschäftigt. — Während bei den Alten eine »Zahl« nur aus der Gesamtheit der natürlichen Zahlenreihe ausgehoben werden konnte, sind im Laufe der Zeit die Grundoperationen der Arithmetik von den ganzen auf die gebrochenen, von den positiven auf die negativen, von rationalen und reellen auf irrationale und imaginäre Zahlen ausgedehnt worden.

Für die Addition der natürlichen, oder der ganzen absoluten Zahlen, von *Newton* und noch von *Cauchy* oft kurzweg »Zahlen« genannt, gilt das associative und das kommutative Gesetz, d. h. es ist

$$a + b + c = a + (b + c),\ a + b + c = a + c + b.$$

Ihre Multiplikation gehorcht ausserdem auch dem distributiven Gesetz, so dass man hat:

$$a \,.\, b \,.\, c = (a \,.\, b) \,.\, c;\ a \,.\, b = b \,.\, a;\ (a+b) \,.\, c = a \,.\, c + b \,.\, c.$$

Diesen direkten oder thetischen Operationen entsprechen als inverse oder lytische Rechnungsverfahren die Subtraktion und die Division; ihre Anwendung auf alle natürlichen Zahlen nötigt zur Einführung der Null, der negativen und gebrochenen Zahlen, welche im Verein mit den natürlichen Zahlen den grossen Körper der rationalen Zahlen bilden, innerhalb dessen alle vier Grundoperationen unbeschränkte Gültigkeit besitzen, wenn der eine Fall der Division mit Null ausgeschlossen wird.

Die Erweiterung des arithmetischen Gebiets durch Einführung der negativen Grössen hatte im 16. Jahrhundert begonnen. *Vieta* unterschied affirmative (positive) und negative Grössen. Aber erst *Descartes* wagte es, in seiner Geometrie einen und denselben Buchstaben sowohl für positive als für negative Zahlenwerte in die Rechnung einzuführen.

Das Irrationale war durch *Euklid* auf Grund geometrischer Ueberlegungen dem mathematischen System einverleibt worden; seine Auffassung erhielt sich während aller folgenden Jahrhunderte, und erst in neuester Zeit [108]) ist durch Forschungen von *Weierstrass, Dedekind, G. Cantor* und *Heine* eine Theorie der irrationalen Zahlen auf arithmetischem Boden geschaffen worden.

Weierstrass[61]) geht vom Begriff der ganzen Zahl aus. Eine Zahlengrösse besteht aus einer Reihe gleichartiger Dinge; die Zahl ist also nichts anderes als »die zusammengesetzte Vorstellung von Eins und Eins und Eins etc.« [89]). Durch Subtraktion und Division gelangt man zu negativen und gebrochenen Zahlen. Unter den letzteren gibt es solche, die auf ein bestimmtes System, z. B. auf unser dekadisches Zahlensystem bezogen, aus unendlich vielen Elementen bestehen, und doch durch Transformation andern, aus einer endlichen Anzahl von Elementen zusammengesetzten Zahlen gleichwertig werden ($0{,}1333\ldots = \frac{2}{15}$). Diese Zahlen sind noch einer Veranschaulichung fähig. Es kann aber bewiesen

werden, dass jede aus unendlich vielen Elementen bekannter Art gebildete Zahl, welche jene Elemente in bekannter endlicher Anzahl enthält, eine ganz bestimmte Bedeutung hat, mag sie einer wirklichen Deutung fähig sein oder nicht. Wenn eine derartige Zahl nur durch die unendliche Reihe ihrer Elemente und nicht auf andere Weise vorgestellt werden kann, so ist sie eine irrationale Zahl.

Dedekind [24]) ordnet alle positiven und negativen, ganzen und gebrochenen, also alle rationalen Zahlen nach ihrer Grösse in ein System oder einen Zahlenkörper R zusammen. Eine bestimmte Zahl a zerlegt dieses System R in die zwei Klassen A_1 und A_2 mit je unendlich vielen Zahlen, so dass jede Zahl in A_1 kleiner ist als jede Zahl in A_2; a ist entweder die grösste Zahl in A_1 oder die kleinste in A_2. Diese rationalen Zahlen können den Punkten einer Geraden eindeutig zugeordnet werden. Dabei stellt sich heraus, dass diese Gerade ausser den von rationalen Zahlen überdeckten Punkten noch unendlich viele andere Punkte enthält; d. h. das System der rationalen Zahlen hat nicht dieselbe Stetigkeit wie die Gerade, und erhält sie erst durch Schaffung neuer Zahlen. — Das Wesen der Stetigkeit findet *Dedekind* in folgendem Axiom: »Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.« Auf dieser Annahme fussend gelingt es, die neuen, die irrationalen Zahlen zu schaffen. Eine rationale Zahl a erzeugt einen Schnitt $(A_1|A_2)$, bestehend aus A_1 und A_2, mit der charakteristischen Eigenschaft, dass es in A_1 eine grösste, oder in A_2 eine kleinste Zahl a gibt. Jedem der unendlich vielen Punkte der Geraden, welche nicht von rationalen Zahlen belegt sind, oder in welchen die Gerade nicht von einer rationalen Zahl geschnitten wird,

entspricht ein und nur ein Schnitt $(A_1|A_2)$, und jeder dieser Schnitte definiert eine und nur eine irrationale Zahl α.

Diesen Unterscheidungen zufolge »bildet das System R aller reellen Zahlen ein wohlgeordnetes Gebiet von einer Dimension; hiermit soll weiter nichts gesagt sein, als dass folgende Gesetze herrschen[24]):

I. Ist $\alpha > \beta$, und $\beta > \gamma$, so ist auch $\alpha > \gamma$. Wir wollen sagen, dass die Zahl β zwischen den Zahlen α, γ liegt.

II. Sind α, γ zwei verschiedene Zahlen, so gibt es immer unendlich viele verschiedene Zahlen β, welche zwischen α, γ liegen.

III. Ist α eine bestimmte Zahl, so zerfallen alle Zahlen des Systems R in zwei Klassen A_1 und A_2, deren jede ∞ viele Individuen enthält; die erste Klasse A_1 umfasst alle die Zahlen α_1, welche $< \alpha$ sind, die zweite Klasse A_2 umfasst alle die Zahlen α_2, welche $> \alpha$ sind; die Zahl α selbst kann nach Belieben der ersten oder der zweiten Klasse zugeteilt werden, und sie ist dann entsprechend die grösste Zahl der ersten oder die kleinste Zahl der zweiten Klasse. In jedem Falle ist die Zerlegung des Systems R in die beiden Klassen A_1, A_2 von der Art, dass jede Zahl der ersten Klasse A_1 kleiner als jede Zahl der zweiten Klasse A_2 ist, und wir sagen, dass diese Zerlegung durch die Zahl α hervorgebracht wird.

IV. Zerfällt das System R aller reellen Zahlen in zwei Klassen A_1, A_2 von der Art, dass jede Zahl α_1 der Klasse A_1 kleiner ist als jede Zahl α_2 der Klasse A_2, so existiert eine und nur eine Zahl α, durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird (das Gebiet R besitzt die Eigenschaft der Stetigkeit).«

Nach *J. Tannery's* Behauptung finden [108]) sich die Grundgedanken von *Dedekinds* Theorie schon in *J. Bertrand's* Lehrbüchern der Arithmetik und Algebra, eine Aufstellung, welche von *Dedekind* entschieden zurückgewiesen worden ist[25]).

G. Cantor und *Heine* [89]) stellen behufs Einführung der irrationalen Zahlen den Begriff der »Fundamentalreihe« auf. Eine solche besteht aus unendlich vielen rationalen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n+r}, \ldots$, und hat die Eigenschaft, dass für eine beliebig klein angenommene positive Zahl ε ein Stellenzeiger n_1 existiert, so dass für $n \geqq n_1$ der absolute Betrag des Unterschieds zwischen dem Glied a_n und irgend einem folgenden Gliede kleiner ist als ε (Konvergenzbedingung der Reihe der a_n). Irgend zwei Fundamentalreihen lassen sich

in Bezug auf Grösser, Gleich oder Kleiner mit einander vergleichen; dadurch erhalten sie die Bestimmtheit einer Zahl in gewöhnlichem Sinne. Die durch eine Fundamentalreihe definierte Zahl heisst eine »Reihenzahl.« Eine Reihenzahl ist entweder identisch mit einer rationalen Zahl, oder sie ist es nicht; im letzteren Fall definiert sie eine irrationale Zahl. Das Gebiet der Reihenzahlen besteht aus der Gesamtheit aller rationalen und irrationalen, d. h. aller reellen Zahlen, und nur aus diesen. — Auch hier kann das Gebiet der reellen Zahlen auf die Gerade bezogen werden, wie *G. Cantor* gezeigt hat.

Die Erweiterung des Zahlengebiets durch die imaginären Grössen knüpft an die Auflösung der Gleichungen an, insbesondere an die des dritten Grads. Die italienischen Algebristen des 16. Jahrhunderts nannten sie »unmögliche Zahlen«. Als eigentliche Lösungen einer Gleichung treten die imaginären Grössen zuerst bei *Albert Girard* (1629) auf. Von *Descartes* stammen die Ausdrücke »reell« und »imaginär« als charakteristische Bezeichnungen für die Verschiedenartigkeit der Wurzeln einer Gleichung. *Moivre* und *Lambert* führten die imaginären Grössen in die Trigonometrie ein, ersterer durch seinen berühmten Satz über die Potenz $(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n$, der übrigens nach *Hankel* zuerst von *Euler* aufgestellt worden sein soll.

Die grössten Verdienste um die Aufklärung des Wesens der imaginären Grössen hat sich *Gauss* [49]) erworben. Von ihm stammt das Zeichen i für $\sqrt{-1}$; er nennt $a + bi$ eine »komplexe« Zahl mit der »Norm« $a^2 + b^2$. Der Name »Modul« für die Grösse $\sqrt{a^2+b^2}$ rührt von *Argand* her (1814), der Name »reduzierte Form« für $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ statt $a + bi$ von *Cauchy*, endlich die Benennung »Richtungscoëfficient« für den Faktor $\cos\varphi + i\sin\varphi$ von *Hankel*. *Gauss*, dem es 1799 noch lediglich rätlicher schien, die komplexen Zahlen beizu-

behalten als sie zu verwerfen [108]), hat durch seine Darlegungen über die imaginären Grössen in der Anzeige zur zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste die Einführung derselben bei arithmetischen Operationen in siegreicher Weise verfochten.

Die geometrische Darstellung komplexer Grössen wurde durch die Bemerkungen verschiedener Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts vorbereitet, unter ihnen besonders durch *Wallis* [49]), welcher bei Gelegenheit der Lösung geometrischer Aufgaben auf algebraischem Weg zu der Erkenntnis kam, dass, wenn gewisse Annahmen für ein Problem zwei reelle Lösungen als Punkte einer Geraden lieferten, andere Annahmen zwei »unmögliche« Wurzeln als Punkte auf einer zur ersten senkrechten Geraden ergaben. Die erste befriedigend durchgeführte Darstellung komplexer Grössen in einer Ebene hat *Argand* 1806 aufgestellt [49]). Seine Veröffentlichung wurde jedoch nicht einmal in Frankreich gewürdigt. Im Jahr 1813 erschien in *Gergonne's* Annalen von dem Artillerieoffizier *Français* in Metz der Abriss einer Theorie der imaginären Grössen, deren Grundgedanken aber auf *Argand* zurückgeführt werden konnten. Obwohl *Argand* seine Theorie durch spätere Arbeiten verbesserte, drang sie doch erst durch, als *Cauchy* für dieselbe in die Schranken trat*). So kam es, dass *Gauss* 1831 denselben Gedanken noch einmal ausführen und durch sein gewaltiges Ansehen die Darstellung der imaginären Grössen in der »*Gauss'schen* Ebene« binnen kurzem zum Gemeingut aller Mathematiker machen konnte.

Durch *Gauss* und *Dirichlet* sind allgemeine komplexe Zahlen in die Arithmetik eingeführt worden. Die fundamentalen Untersuchungen *Dirichlet's* über die komplexen Zahlen, welche mit Andeutungen der Beweise in den Berichten

---

*) Houël, s. Fortschritte 1874.

der Berliner Akademie von 1841, 1842 und 1846 enthalten sind, erfuhren wesentliche Erweiterungen durch *Eisenstein*, *Kummer* und *Dedekind*. *Gauss* hatte in der Entwicklung der reellen Theorie der biquadratischen Reste Veranlassung gefunden, komplexe Zahlen von der Form $a + bi$ einzuführen, und *Lejeune Dirichlet* hat die Theorie solcher Zahlen so ausgebildet, dass in der neuen Lehre dieser komplexen Zahlen, wie in der reellen Theorie, Primzahlen, Kongruenzen, Restsätze, Reziprozität etc. auftreten, nur zeigen hier die Sätze grössere Mannigfaltigkeit und Zusammensetzung, bieten aber auch dem Beweis grössere Schwierigkeit [18a]). — Statt der Gleichung $x^4 - 1 = 0$, welche als Wurzeln die *Gauss'schen* Einheiten liefert, hat *Eisenstein* die Gleichung $x^3 - 1 = 0$ benutzt und komplexe Zahlen $a + b\rho$ (ρ eine dritte Einheitswurzel) betrachtet, deren Theorie mit derjenigen der *Gauss'schen* Zahlen $a + bi$ Aehnlichkeit hat, jedoch in verschiedenen Dingen von ihr zu trennen ist. *Kummer* gieng zum allgemeineren Fall über unter Zugrundlegung der Gleichung $x^n - 1 = 0$, so dass komplexe Zahlen von der Form

$$\alpha = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \ldots$$

entstehen, wo die a_i ganze reelle Zahlen, die A_i Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ sind. *Kummer* hat auch den Begriff der idealen Zahlen aufgestellt, d. h. solcher Zahlen, welche Faktoren von Primzahlen sind und die Eigenschaft haben, dass es immer eine Potenz dieser idealen Zahlen gibt, welche eine wirkliche Zahl liefert. Es existiert z. B. für eine Primzahl p keine Zerlegung $p^3 = A . B$ (wo A von p und p^2 verschieden sein soll); allein in der Theorie der aus den dreiundzwanzigsten Einheitswurzeln gebildeten Zahlen gibt es Primzahlen p, welche der obigen Bedingung genügen. Es ist dann p das Produkt zweier idealen Zahlen, deren dritte Potenzen die zwei wirklichen Zahlen A und B sind, so dass man hat $p^3 = A . B$. — In der späteren, durch *Dedekind* ge-

gebenen Entwicklung sind die Einheiten die Wurzeln einer beliebigen irreduciblen Gleichung mit ganzen Zahlencoëfficienten. Für den Fall der Gleichung $x^2 - x + 1 = 0$ ist $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$, also das ρ *Eisenstein's*, als eine ganze Zahl zu betrachten.

Dem Wesen komplexer Zahlen nachspürend gelangten *H. Grassmann, Hamilton* und *Scheffler* zu eigenartigen Entdeckungen. *Grassmann*, der übrigens im wesentlichen Determinantensätze entwickelte, untersuchte in seiner »Ausdehnungslehre« Addition und Multiplikation komplexer Zahlen; *Hamilton* schuf auf ähnlichem Weg den »Quaternionencalcul«, eine namentlich in England und Amerika beliebte Rechnungsweise, deren Berechtigung durch ihre verhältnismässig einfache Anwendbarkeit auf Probleme der Sphärik, der Krümmungstheorie, der Mechanik erwiesen worden ist.

Der vollständige Doppeltitel*) von *H. Grassmann's* im Jahr 1844 erschienenem Hauptwerk ist: »Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disziplin, dargestellt und durch Anwendungen erläutert. Erster Teil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. — Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendung auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert«. Die beifälligen Urteile über dieses merkwürdige Werk von *Gauss*, der findet, dass »die Tendenzen des Buchs teilweise denjenigen Wegen begegnen, auf denen er selbst seit einem halben Jahrhundert wandle«, von *Grunert* und von *Möbius*, der in *Grassmann* »einen Geistesverwandten hinsichtlich der Mathematik, nicht auch in Beziehung auf Philosophie« erblickt und *Grassmann* zu seiner »vortrefflichen Schrift« beglückwünscht,

*) V. Schlegel, Grassmann, sein Leben und seine Werke.

waren nicht imstande, demselben einen grösseren Leserkreis zu schaffen, so dass noch im Jahr 1853 *Möbius* schreiben kann, »*Bretschneider* in Gotha sei der einzige Mathematiker, der ihm versichert habe, dass er die Ausdehnungslehre durchgelesen.«

Den ersten Anstoss zu seinen Betrachtungen erhielt *Grassmann* aus der Geometrie, indem er sich daran gewöhnte, für den Fall, dass A, B, C Punkte einer Geraden sind, $AB + BC = AC$ zu setzen[35]. Damit verband er Sätze, welche das Parallelogramm als Produkt zweier anstossenden Seiten gelten lassen und kam so zu neuen Produkten, für welche die gewöhnlichen Gesetze der Multiplikation gelten, soweit nicht Faktoren zu vertauschen sind, in welch letzterem Falle die Vorzeichen umgekehrt werden müssen. Eingehendere Betrachtungen führten *Grassmann* dazu, als Summe mehrerer Punkte den gemeinsamen Schwerpunkt, als Produkt zweier Punkte die zwischen ihnen liegende endliche Strecke, als Produkt dreier Punkte die Fläche ihres Dreiecks und als Produkt von vier Punkten das Volumen ihrer Pyramide anzusehen. Durch das Studium des »Barycentrischen Calculs« von *Möbius* wurde *Grassmann* noch weiter gefördert. Das Produkt zweier Strecken, die ein Parallelogramm bildeten, wurde äusseres Produkt genannt (die Faktoren sind nur mit Zeichenwechsel vertauschbar), das Produkt einer Strecke und der senkrechten Projektion einer andern auf sie bildete ein inneres Produkt (die Faktoren sind ohne Zeichenwechsel vertauschbar). Die Einführung der Exponentialgrösse führte zum Ausbau des Systems, von welchem *H. Grassmann* in *Grunert's* Archiv (1845) eine kurze Uebersicht erscheinen liess.

Hamilton[118] verbreitet sich über die für seine Entwicklungen so charakteristischen Werte i, j, k zuerst in einer Mitteilung an die Akademie zu Dublin 1844. Die »Lectures on Quaternions« erschienen 1853, die »Elements of Quaternions« 1866. — Von einem festen Punkt O werde eine Strecke[18] nach dem Punkt P mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z gezogen. Bedeuten nun i, j, k feste Coëfficienten (Einheitslängen auf den Axen), so heisst

$$V = ix + jy + kz$$

ein Vektor, und dieser additiv verknüpft mit der »reinen Grösse« oder dem »Skalar« w erzeugt die Quaternion

$$Q = w + ix + jy + kz.$$

Die Addition zweier Quaternionen erfolgt nach der gewöhnlichen Formel:

$$Q + Q' = w + w' + i(x + x') + j(y + y') + k(z + z').$$

Aber für den Fall der Multiplikation ist

$$i = j^2 = k^2 = -1,\quad i = jk = -kj,\quad j = ki = -ik,\quad k = ij = -ji$$

zu setzen, so dass man erhält:

$$\begin{aligned} Q \,.\, Q' = ww' - xx' - yy' - zz' &+ i(wx' + xw' + yz' - y'z) \\ &+ j(wy' + yw' + zx' - z'x) \\ &+ k(wz' + zw' + xy' - yx'). \end{aligned}$$

Denselben Gegenstand betreffend veröffentlichte *Scheffler* 1846 sein erstes Werk: »Ueber das Verhältnis der Arithmetik zur Geometrie«, ferner 1852 den »Situationscalcul« und 1880 die »Polydimensionalen Grössen.« Für ihn [117]) ist der Vektor r im dreidimensionalen Raum dargestellt durch

$$r = a \,.\, e^{\alpha\sqrt{-1}} \,.\, e^{\beta\sqrt{\div 1}},\ \text{oder}\ r = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\div 1},$$

$$\text{oder}\ r = x + y\,.\,i + z\,.\,i\,.\,i_1\ \text{für}\ i = \sqrt{-1}\ \text{und}\ i_1 = \sqrt{\div 1}$$

als Drehfaktoren um Winkel von 90° in der xy- und xz-Ebene. Für die Multiplikation gilt bei *Scheffler* das distributive Gesetz nicht immer, d. h. es ist nicht immer $a(b + c)$ dasselbe wie $ab + ac$.

Untersuchungen über den Umfang des Bereichs, innerhalb dessen unter gewissen Voraussetzungen die Gesetze der arithmetischen Elementaroperationen Gültigkeit besitzen, haben zur Aufstellung eines Logikcalculs [97]) geführt. Zu dieser Art von Untersuchungen gehören ausser *Grassmann's* »Formenlehre« (1872) Noten von *Cayley* und *Ellis*, und insbesondere die Werke von *Boole* und *Schröder*.

Ein kleines Teilgebiet der modernen Zahlentheorie oder

höheren Arithmetik, die sich im wesentlichen in die Theorie der Kongruenzen und der Formen spaltet, bilden die Kettenbrüche. Der zur Bildung solcher Brüche führende Algorithmus, wie er auch bei der Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Masses zweier Zahlen benützt wird, reicht in die Zeiten *Euklids* zurück. Die Zusammenstellung der Teilquotienten zum fortlaufenden Bruch rührt von *Cataldi* her, der im Jahr 1613 mit Hilfe dieses Verfahrens den Wert von Quadratwurzeln bestimmte, aber die Eigenschaften der neuen Brüche nicht näher untersuchte.

Zur Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen [41]) liefert *Daniel Schwenter* den ersten wesentlichen Beitrag. Er beschäftigt sich damit, einen Bruch, der in grossen Zahlen gegeben ist, zu heben, und stellt bei dieser Gelegenheit die zur successiven Erstellung der Näherungsbrüche erforderlichen Regeln in der heute noch gebrauchten Form auf. Auch *Huygens* und *Wallis* arbeiteten in diesem Gebiet; von letzterem rührt die mit einem Beweis versehene allgemeine Formel her, welche die Zähler und Nenner der Näherungswerte

$$\frac{p_n}{q_n}, \quad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \quad \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$$

in folgender Weise verbindet:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n\, p_{n-1} + b_n\, p_{n-2}}{a_n\, q_{n-1} + b_n\, q_{n-2}}.$$

Die grösste Bereicherung erfuhr die Lehre von den Kettenbrüchen im Verlauf des 18. Jahrhunderts durch *Euler*, der den Namen »fractio continua« aufbrachte (von »Kettenbrüchen« spricht man erst seit Anfang des 19. Jahrhunderts). Er bemühte sich namentlich, unendlich fortlaufende Kettenbrüche in unendliche Produkte und Reihen zu entwickeln, und kam so unzweifelhaft zu dem Bestreben, die Näherungswerte

independenter Form darzustellen, d. h. ein allgemeines Gesetz zu finden, vermöge dessen die Berechnung eines beliebigen Näherungswertes ohne Feststellung der vorangehenden Näherungswerte möglich wäre. Obwohl *Euler* sich der Auffindung eines solchen Gesetzes nicht rühmen konnte, schuf er doch einen besondern Algorithmus zu diesem Zweck, der ihn aber dem erstrebten Ziele nicht wesentlich näher brachte, weil er trotz des Vorgangs von *Cramer* der Verwendung von Determinanten aus dem Wege ging, um sich dafür inniger an die reine Kombinatorik anzuschliessen. Von diesem Gesichtspunkt aus wurde dasselbe Problem namentlich von *Hindenburg* und seinen Schülern *Burckhardt* und *Rothe* in Angriff genommen. Jedoch kennen die Kombinatoriker die Berechnung des Kettenbruchs nur von einer Seite her, während das independente Darstellungsverfahren gestatten muss, den verlangten Näherungswert von beiden Seiten, von vorn wie von hinten, zu berechnen, was nach *Lejeune Dirichlet* unter Umständen von grosser praktischer Bedeutung sein kann.

Erst die neuere Zeit hat in dieses Gebiet die Determinantenrechnung, allerdings auch ein kombinatorisches Symbol, eingeführt, und zwar stammt die erste Anregung hiezu von dem dänischen Mathematiker *Ramus* (1855) her. Auch *Heine*, *Möbius* und *S. Günther* stellten ähnliche Untersuchungen an; es bildeten sich »Kettenbruchdeterminanten.« — Die Irrationalität gewisser unendlicher Kettenbrüche[108]) wurde von *Legendre* untersucht, der ebenso wie *Gauss* den Quotienten zweier Potenzreihen in der Form eines Kettenbruchs darstellen lehrte. Durch Anwendung unendlicher Kettenbrüche lässt sich zeigen, dass die Grössen e^x (für rationale Werte von x), ferner e, π, π^2 nicht rational sein können (*Lambert, Legendre, Stern*). Erst in der neuesten Zeit ist durch *Hermite* die transcendente Natur von e, durch *F. Lindemann* die von π klargelegt worden.

In der eigentlichen Zahlentheorie haben deren älteste Vertreter *Euklid* und *Diophant* ziemlich schwierige Aufgaben über Eigenschaften der Zahlen gelöst; ein weiteres Vordringen war aber nicht möglich, so lange ohne ziffernmässige Dar-

stellung und fast nur mit einer im geometrischen Gewand auftretenden Algebra untersucht werden musste[64]). Bis auf *Viète* und *Bachet* ist in zahlentheoretischen Dingen kein wesentlicher Fortschritt zu verzeichnen. Ersterer löste mehrere zahlentheoretische Probleme. Letzterer gab in seinem Werk: »Problèmes plaisants et délectables« eine fein durchgeführte Bearbeitung der unbestimmten Gleichungen ersten Grads. Am Beginn der neueren Zeit sind die ersten Steine zur Festlegung des Fundaments der Zahlentheorie von *Fermat* beschafft worden, der sich an *Diophant* gebildet hatte und auch dessen von *Bachet* bearbeiteten Werken wertvolle Zusätze einverleibte. Die grosse Menge von Sätzen, welche auf ihn zurückzuführen sind, hat er meist ohne Beweis gegeben, z. B. folgende Behauptungen:

»Jede Primzahl von der Form $4n + 1$ ist die Summe zweier Quadrate; eine solche von der Form $8n + 1$ besitzt zu gleicher Zeit die drei Formen $y^2 + z^2$, $y^2 + 2z^2$, $y^2 - 2z^2$; jede von der Form $8n + 3$ stellt sich als $y^2 + 2z^2$, jede von der Form $8n + 7$ als $y^2 - 2z^2$ dar.« Ferner: »Jede beliebige Zahl kann durch Addition von drei Trigonalzahlen, von vier Quadratzahlen, fünf Pentagonalzahlen etc. gebildet werden.«

Bewiesen wird durch *Fermat*, dass der Inhalt eines pythagoräischen rechtwinkligen Dreiecks, also beispielsweise eines solchen mit den Seiten 3, 4 und 5, keine Quadratzahl sein kann. Auch ist wohl *Fermat* der erste, welcher die Auflösung der Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ gekannt hat, wenigstens legte er diese Aufgabe den englischen Mathematikern vor, unter denen Lord *Brounker* eine Auflösung fand, welche in die Werke von *Wallis* übergegangen ist. — Viele der Sätze *Fermat's* gehören zu den »schönsten Lehrsätzen der höheren Arithmetik*), und haben das Eigne, dass sie durch Induktion leicht entdeckt werden, ihre

*) Gauss, Werke, II. S. 152.

Beweise hingegen äusserst versteckt liegen und nur durch sehr tief eindringende Untersuchungen aufgespürt werden können. Gerade dies ist es, was der höheren Arithmetik jenen zauberischen Reiz gibt, der sie zur Lieblingswissenschaft der ersten Geometer gemacht hat, ihres unerschöpflichen Reichtums nicht zu gedenken, woran sie alle andern Teile der reinen Mathematik so weit übertrifft«.

Nach *Fermat* nahm *Euler* zahlentheoretische Studien ernstlich wieder auf. Von ihm stammt unter anderem die erste wissenschaftliche Lösung der Schachbrettaufgabe, welche verlangt, dass der Springer eines Schachbretts, von einem bestimmten Feld ausgehend, nach und nach alle vierundzechszig Felder einfach besetzen soll, ferner der Satz, dass das Produkt der Summe von vier Quadraten in ein anderes ähnliches Produkt ebenfalls die Summe von vier Quadraten gibt. Er findet auch Beweise zu verschiedenen *Fermat'schen* Sätzen, ferner die allgemeine Auflösung der unbestimmten Gleichung zweiten Grads mit zwei Unbekannten unter der Voraussetzung des Bekanntseins einer speziellen Lösung, und behandelt eine Menge unbestimmter Gleichungen, für welche er scharfsinnige Lösungen entdeckt.

Euler (ebenso wie *Krafft*), beschäftigte sich auch mit befreundeten Zahlen[103]). Dieselben, von *Jamblichus* als den Pythagoräern bekannt erwähnt (s. S. 27), auch von dem Araber *Tabit ibn Kurra* aufgezeichnet, regten *Descartes* zur Auffindung eines Bildungsgesetzes an, welches *van Schooten* wiedergibt. Diese Vorschrift erweiterte *Euler*, indem er davon ausging, dass zwei befreundete Zahlen die gleiche Anzahl von Primfaktoren besitzen müssen, und dass die Summe aller Teiler der einen Zahl die andere ergeben soll. Es sind beispielsweise $220 = 2^2 . 55$ und $284 = 2^2 . 71$ befreundete Zahlen, weil man als Teilersumme dieser Zahlen findet:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284,$$
$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 200.$$

Die Aufstellung befreundeter Zahlen hängt entweder von der Lösung der Gleichung $xy + ax + by + c = 0$ oder von der Zerlegung der quadratischen Form $ax^2 + bxy + cy^2$ ab.

Nächst *Euler* war es *Lagrange*, der manches zahlentheoretisch interessante Resultat zu veröffentlichen vermochte. Er zeigte, dass eine beliebige Zahl als Summe von vier oder weniger Quadraten darstellbar ist, und dass eine reelle Wurzel einer algebraischen Gleichung beliebigen Grads in einen Kettenbruch verwandelt werden kann. Er lieferte auch einen ersten sehr schönen Beweis dafür, dass die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ immer in ganzen Zahlen lösbar ist, und entdeckte eine allgemeine Methode zur Ableitung von Sätzen über Primzahlen.

Nun aber führt die Entwicklung der Zahlentheorie in zwei gewaltigen Sprüngen aufwärts zu *Legendre* und *Gauss*. Des ersteren wertvolle Abhandlung: »Essai sur la théorie des nombres«, nur wenige Jahre vor *Gauss*' »Disquisitiones arithmeticae« erschienen, bringt eine Zusammenfassung der bis dahin veröffentlichten Resultate nebst eigenen Entwicklungen, unter ihnen als Glanzpunkt das quadratische Reciprocitätsgesetz, oder, wie es *Gauss* nannte, das »Theorema fundamentale in doctrina de residuis quadratis«. Dieses Gesetz gibt eine Beziehung zwischen zwei ungeraden und ungleichen Primzahlen an und kann folgendermassen ausgesprochen werden:

Es sei $\left(\frac{m}{n}\right)$ der Rest, welcher sich bei der Division von $m^{\frac{n-1}{2}}$ durch n ergibt, und $\left(\frac{n}{m}\right)$ der Rest der Division von $n^{\frac{m-1}{2}}$ durch m, welche Reste stets $+1$ oder -1 sind. »Welches[64]) dann auch die Primzahlen m und n sein mögen man erhält stets, falls nicht beide von der Form $4x + 3$ sind, $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$. Sind aber beide von der Form $4x + 3$, so hat man $\left(\frac{n}{m}\right) = -\left(\frac{m}{n}\right)$.«

Diese zwei Fälle sind in der Formel enthalten:

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right).$$

Nach der schon *Bachet* gelungenen vollständigen Behandlung der unbestimmten Gleichungen ersten Grads mit zwei Unbekannten, welche unter Anwendung der *Gauss'schen* Schreibweise in der Form $x \equiv a \pmod b$, gleichbedeutend mit $\frac{x}{b} = y + a$, auftritt, handelte es sich um Lösung der Kongruenz $x^2 \equiv m \pmod n$. Einzelne besondere Fälle der vollständigen Lösung kannte schon *Fermat*; er wusste, unter welchen Umständen $\pm 1, 2, \pm 3, 5$ quadratische Reste oder Nichtreste einer ungeraden Primzahl m sind [7]). Für die Fälle -1 und ± 3 rühren die Beweise von *Euler*, für ± 2 und ± 5 von *Lagrange* her. *Euler* war es auch, der vier Sätze mitteilte, welche das quadratische Reciprocitätsgesetz in seiner ganzen Allgemeinheit umfassen, ohne dass er jedoch einen vollständigen Beweis dazu lieferte. Auch der berühmte Beweis von *Legendre* (in »Essai sur la théorie des nombres«, 1798) ist noch unvollständig. *Gauss* erbrachte, ohne indes die Arbeit von *Euler* zu kennen, im Jahr 1796 den ersten einwurfsfreien Beweis, der zugleich die Eigentümlichkeit besitzt, dass er die Prinzipien der später angegebenen Beweisführungen in sich schliesst. *Gauss* stellte für dieses wichtige Gesetz nach und nach nicht weniger als acht Beweise auf, von denen der sechste, der Zeit nach der letzte, fast gleichzeitig durch *Cauchy*, *Jacobi* und *Eisenstein* vereinfacht wurde; durch *Eisenstein* wurde insbesondere gezeigt, dass das quadratische, kubische und biquadratische Gesetz einer einzigen Quelle entströmen. Im Jahr 1861 veröffentlichte *Kummer* mit Hilfe der Formenlehre zwei Beweise für das quadratische Reciprocitätsgesetz, welche der Verallgemeinerung für $n$te Potenzreste fähig waren. — Bis jetzt sind fünfundzwanzig verschiedene Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes veröffentlicht worden; sie benutzen entweder Induktion und Reduktion, oder die Lehre von der Kreisteilung, Funktionentheorie oder Formenlehre. Ausser den erwähnten acht Beweisen von *Gauss* zählt man vier von *Eisenstein*, zwei von *Kummer*, je einen

von *Jacobi*, *Cauchy*, *Liouville*, *Lebesgue*, *Genocchi*, *Stern*, *Zeller*, *Kronecker*, *Bouniakowsky*, *Schering*, *Petersen*, *Voigt*, *Busche*, *Pepin*.

So wesentlich auch die Erlangung derartiger Erfolge an eine Mitarbeit verschiedener Mathematiker aus verschiedenen Zeiten gebunden war: unbestritten gebührt *Gauss* das Verdienst, in seinen »Disquisitiones arithmeticae« von 1801 das Bedeutendste für die grundlegende Entwicklung der Zahlentheorie geleistet zu haben. Spätere zahlentheorische Untersuchungen wurzeln in dem Boden, welchen *Gauss* zubereitet und für weitere Ausbeutung geeignet hinterlassen hat. Von solchen, erst nach Einführung der Theorie der elliptischen Transcendenten ausgeführten Arbeiten seien hier erwähnt die Sätze *Jacobi's* über die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in zwei, vier, sechs und acht Quadrate[26]), sowie die Untersuchungen *Dirichlet's* über die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n.$$

Die Beschäftigung mit der Zahlentheorie bildete *Dirichlet's* Lieblingsstudium[63]); er war der erste, welcher an einer deutschen Universität Vorlesungen über Zahlentheorie hielt, und welcher sich rühmen konnte, nach unablässigem Studium der Disquisitiones arithmeticae auch die schwierigsten Partien derselben mit ihren hinter starren Methoden verborgenen tiefen Gedanken durchsichtig und verständlich gemacht zu haben, was einem *Legendre* nach seinem eigenen Geständnis misslungen war. —

Dirichlet's früheste Abhandlung: »Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré« (1825 der französischen Akademie eingereicht) beschäftigt sich mit dem von *Fermat* ohne Beweis aufgestellten Satz, dass »die Summe zweier Potenzzahlen von gleichen Exponenten niemals einer Potenz von demselben Exponenten gleich sein kann, wenn diese Potenzen höher sind als die

zweite.« *Euler* und *Legendre* hatten diesen Satz für dritte und vierte Potenzen bewiesen, *Dirichlet* betrachtet die Summe zweier fünften Potenzen und beweist, dass für ganze Zahlen $x^5 + y^5$ nicht gleich az^5 werden kann. Die hohe Bedeutung dieser Arbeit liegt in ihrer engen Beziehung zur Theorie der Formen höherer Grade. — *Dirichlet's* weitere Leistungen im Gebiet der Zahlentheorie beziehen sich auf elegante Beweise von *Gauss'schen* Sätzen über biquadratische Reste und deren Reciprocitätsgesetz, welche 1825 durch die Göttinger gelehrten Anzeigen veröffentlicht worden waren, sowie auf die Bestimmung der Klassenanzahl der quadratischen Formen für jede gegebene Determinante. Seine »Anwendungen der Analysis auf die Zahlentheorie sind in ähnlicher Weise Epoche machend, wie die *Descartes'schen* Anwendungen der Analysis für die Geometrie; sie würden auch, ebenso wie die analytische Geometrie, als Schöpfung einer neuen mathematischen Disziplin anerkannt werden müssen, wenn sie sich nicht bloss auf gewisse Gattungen, sondern auf alle Probleme der Zahlentheorie gleichmässig erstreckten« [63]).

Die vielfache Beschäftigung mit Zahleneigenschaften und Gesetzen der Zahlen hatten im 17. Jahrhundert auch dahin geführt, die Zahlen auf ihre Divisoren hin zu untersuchen [102]). Fast zwei Jahrtausende lang war des *Eratosthenes* »Sieb« das einzige Verfahren zur Bestimmung der Primzahlen geblieben. Im Jahr 1657 gab *Fr. v. Schooten* eine die ersten zehn Tausend umfassende Tafel der Primzahlen heraus. Eine Erweiterung hiezu brachte *Pell* elf Jahre später, indem er eine Tabelle der kleinsten Primfaktoren (mit Ausnahme von 2 und 5) für alle Zahlen bis 100 000 fertigte. In Deutschland blieben diese Tafeln fast unbekannt, daher gab *Poëtius* im Jahr 1728 selbständig eine von 1 bis 100000 reichende Faktorentafel heraus. In der Folgezeit fand dieses Beispiel wiederholt Nachahmung; die *Krüger'sche* Tafel von 1746

geht bis 100 000, die *Lambert'sche* von 1770, welche zuerst die in neueren Tafeln gebräuchliche Einrichtung zeigt, bis 102 000. Von den zwischen 1770 und 1811 berechneten sechs Tafeln ist die von *Felkel* wegen ihres eigentümlichen Schicksals merkwürdig; der Druck wurde vom k. k. Aerarium in Wien bis 408 000 gefördert; dann aber wurde der Rest des Manuscripts zurückbehalten, und der schon gedruckte Teil desselben zur Anfertigung von Patronen für den letzten Türkenkrieg des 18. Jahrhunderts benützt. — Im Jahr 1817 erschien in Paris die »Table des diviseurs pour tous les nombres du 1er, 2e, 3e million«. *Crelle* überreichte in den vierziger Jahren der Berliner Akademie Faktorentafeln für die vierte, fünfte und sechste Million, die aber nicht gedruckt wurden. Der durch sein rechnerisches Talent bekannte *Dase* sollte, von *Gauss* dazu bestimmt, die siebente bis zehnte Million berechnen, starb aber 1861 vor Vollendung der Arbeit. Seit 1877 lässt die British Association die Anfertigung solcher Tafeln durch *Glaisher* mit Beihilfe zweier Rechner fortsetzen. Der Druck der Faktorentafel für die vierte Million wurde 1879 vollendet.

Im Jahr 1856 veröffentlichte *K. G. Reuschle* durch eine Korrespondenz mit *Jacobi* dazu veranlasst, seine Tafeln zum Gebrauch für die Zahlentheorie. Sie enthalten die Zerlegung der Zahlen $10^n - 1$ in Primfaktoren bis $n = 242$, ferner eine Anzahl ähnlicher Zerlegungen in Primfaktoren für Zahlen von der Form $a^n - 1$, und eine Tafel der Zerlegung für Primzahlen $p = 6n + 1$ in die Formen

$$p = A^2 + 3B^2 \text{ und } 4p = C^2 + 27M^2,$$

wie sie in der Lehre von den kubischen Resten und in der Kreisteilung auftreten.

Von grösster Bedeutung für den Fortschritt der algebraischen und geometrischen Wissenschaft zugleich war die

Entwicklung der Lehre von den symmetrischen Funktionen, der Eliminationstheorie und der Lehre von den Invarianten algebraischer Formen, wie sie sich durch Uebertragung der Auffassung der projektiven Geometrie auf die geometrische Gebilde darstellenden Gleichungen und Gleichungssysteme herausbildete [13]).

Die ersten Formeln zur Berechnung von symmetrischen Funktionen (der Potenzsummen) der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in den Coëfficienten derselben rühren von *Newton* her. Auch *Waring* stellte ähnliche Berechnungen an (1770) und entwickelte ein Prinzip, auf das *Gauss* (1816) selbständig kam, vermöge dessen sich beliebige symmetrische Funktionen in den elementarsymmetrischen Funktionen ausdrücken lassen. Direkt erreicht man das nach einem von *Cayley* und *Sylvester* (1853) ausgebildeten Verfahren unter Benützung der von *Cayley* herrührenden Regeln über das Gewicht symmetrischer Funktionen. — Die ältesten Tafeln symmetrischer Funktionen (bis zum zehnten Grad reichend) sind von *Meyer-Hirsch* in seiner Aufgabensammlung (1809) veröffentlicht worden. Die Berechnung derselben, welche auf sehr mühsame Weise erfolgte, wurde durch *Cayley* und *Brioschi* wesentlich vereinfacht.

Die Resultante zweier Gleichungen mit einer Unbekannten, oder was dasselbe ist, zweier Formen mit zwei homogenen Veränderlichen, wurde von *Euler* (1748) und von *Bézont* (1764) berechnet. Beiden gebührt das Verdienst, die Bestimmung der Resultante auf die Lösung eines Systems linearer Gleichungen zurückgeführt zu haben [91]). *Bézont* führte den Namen »Resultante« ein (*de Morgan* schlug »Eliminante« vor) und bestimmte den Grad dieser Funktion. Auch *Lagrange* und *Poisson* beschäftigten sich mit Fragen der Elimination; ersterer stellte (1770) die Bedingung für mehrere gemeinsame Wurzeln auf; letzterer gab eine Methode zur Bildung symmetrischer Funktionen der gemeinsamen Werte

der Wurzeln eines Systems von Gleichungen. — Die weitere Förderung der Eliminationstheorie erfolgte namentlich durch *Jacobi*, *Hesse*, *Sylvester*, *Cayley*, *Cauchy*, *Brioschi*, *Gordan*. *Jacobi's* Abhandlung [80]), welche die Resultante als Determinante darstellte, verbreitete zugleich Licht über die der Resultante angehörigen Coëfficientenaggregate und über die Gleichungen, in welchen die Resultante und ihr Produkt mit einer andern teilweise willkürlichen Funktion als Funktionen der gegebenen zwei Formen dargestellt werden. Dieser Gedanke *Jacobi's* gab *Hesse* den Anstoss zur Ausführung wichtiger Arbeiten, zunächst über die Resultante aus zwei Gleichungen, welche er 1843 nach der schon früher von *Sylvester* angegebenen dialytischen Methode neu entwickelte, dann 1844 »über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen mit zwei Veränderlichen« und kurz darauf über die Wendepunkte ebener Kurven. Den Hauptwert legte *Hesse* bei diesen Untersuchungen nicht auf die Gestalt der Endgleichung, sondern auf den Einblick in die Zusammensetzung derselben aus bekannten Funktionen. So kam er zur Funktionaldeterminate dreier quadratischer Grundformen, und weiterhin zur Determinate der zweiten partiellen Differentialquotienten der kubischen Form, zu ihrer *Hesse'schen* Determinante, deren geometrische Deutung das interessante Ergebnis lieferte, dass im allgemeinen Fall die Wendepunkte einer ebenen Kurve $n$ter Ordnung durch den vollständigen Schnitt derselben mit einer Kurve von der Ordnung $3(n-2)$ erhalten werden. Dieses Resultat war vorher nur von Kurven dritter Ordnung bekannt; für sie hatte es *Plücker* gefunden. Von *Hesse* stammt ferner das erste grössere Beispiel der Herausschaffung von Faktoren aus Resultanten, soweit diese Faktoren der eigentlich zu lösenden Frage fremd sind. Die Eliminationstheorie immer weiter ausbauend gelangte *Hesse* 1849 dazu, die lange gesuchte Gleichung vierzehnten Grads, von welcher die Doppeltangenten einer Kurve

vierter Ordnung abhängen, frei von allen überschüssigen Faktoren darzustellen.

Die von *Hesse* 1843 benutzte besondere Eliminationsmethode ist die von *Sylvester* 1840 veröffentlichte dialytische Methode; sie liefert die Resultante zweier Funktionen $m$ter und $n$ter Ordnung als eine Determinante, in welcher die Coëfficienten der ersten in n, und die Coëfficienten der zweiten in m Zeilen auftreten. *Sylvester* war es auch, der (1851) für die Funktion, welche die Bedingung für das Vorhandensein zweier gleichen Wurzeln einer algebraischen Gleichung ausdrückt, den Namen »Discriminante« einführte; bis dahin pflegte man nach dem Vorgang von *Gauss* »Determinante der Funktion« zu sagen.

Der für alle Gebiete der heutigen Mathematik so wichtige Begriff der Invarianz geht mit seinen ersten Anfängen bis auf *Lagrange* zurück[91]), welcher 1773 bemerkte, dass der Discriminante der quadratischen Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ beim Uebergang von x zu $x + \lambda y$ Unveränderlichkeit zukommt. Diese Unveränderlichkeit der Discriminanten bei linearer Transformation wurde für binäre und ternäre quadratische Formen von *Gauss* (1801) vollkommen erwiesen; allein dass der Discriminante im allgemeinen und stets Invarianz zukomme, erkannte und bewies zuerst *G. Boole* (1841). *Cayley* fand 1845, an die Abhandlung *Boole's* anknüpfend, dass es noch andere Funktionen gebe, welchen bei linearer Transformation invariante Eigenschaften zukommen, lehrte solche Funktionen bestimmen und nannte sie »Hyperdeterminanten«. Diese Entdeckung *Cayley's* entwickelte sich rasch zu der mächtigen Invariantentheorie, namentlich durch die Abhandlungen von *Cayley*, *Aronhold*, *Boole*, *Sylvester*, *Hermite*, *Brioschi*, dann durch *Clebsch*, *Gordan* u. a. — Nach Erscheinen der ersten *Cayley'schen* Arbeit lieferte *Aronhold* 1849 einen wichtigen Beitrag durch Bestimmung der Invarianten S und T einer ternären Form und durch Entwick-

lung ihrer Beziehung zur Discriminante derselben Form. Von 1851 ab erschien eine Reihe wichtiger Abhandlungen von *Cayley* und *Sylvester*. Letzterer schuf damit zugleich einen grossen Teil der jetzt herrschenden Terminologie, vor allem den Namen »Invariante« (1851). Im Jahr 1854 entdeckte *Hermite* sein Reciprocitätsgesetz, welches aussagt, dass jeder Covariante oder Invariante vom Grad ρ und der Ordnung r einer Form $m$ter Ordnung auch eine Covariante oder Invariante vom Grad m und der Ordnung r einer Form ρter Ordnung entspricht. — *Clebsch* und *Gordan* benützen die von *Aronhold* für binäre Formen eingeführte Abkürzung b_x^n bei ihren fundamentalen Entwicklungen, z. B. bei der systematischen Ausbildung des in seinen Anfängen schon *Cayley* bekannten Prozesses der Ueberschiebung zur Bildung von Invarianten und Covarianten, bei dem Faltungsprozess zur Bildung von Elementarcovarianten und bei der Aufstellung simultaner Invarianten und Covarianten, insbesondere der Kombinanten. — Den wichtigsten Fortschritt der Neuzeit innerhalb dieser Theorie bildet wohl *Gordan's* Satz über die Endlichkeit des Formensystems, der aussagt, dass es nur eine endliche Anzahl von Invarianten und Covarianten einer binären Form oder eines Systems solcher Formen gibt. *Gordan* hat auch ein Verfahren zur Aufstellung des vollständigen Formensystems angegeben und dasselbe für den Fall der binären Formen fünfter und sechster Ordnung durchgeführt.

Um auf die grosse Bedeutung der Invariantentheorie für andere Zweige der Mathematik mit einem Worte hinzuweisen, möge es genügen anzuführen, dass von *Clebsch* die Theorie der binären Formen auf die der ternären (insbesondere für Gleichungen in Liniencoordinanten) übertragen worden ist, dass die Form dritter Ordnung auf einer Raumkurve dritter Ordnung ihre Darstellung findet, während binäre Formen vierter Ordnung in der Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung eine grosse Rolle spielen, und zur Lösung der Gleichung vierten Grads, sowie zur Transformation des elliptischen Integrals erster Gattung

auf die *Hermite'sche* Normalform dienen, endlich dass die Kombinanten bei der Umformung von Gleichungen fünften und sechsten Grads in wesentlicher Weise eingeführt werden können. Forschungsresultate von *Clebsch, Weierstrass, Klein, Bianchi, Burckhardt* haben die grosse Bedeutung der Invariantentheorie für die Lehre von den hyperelliptischen und *Abel'schen* Funktionen erwiesen. Diese Theorie hat ferner durch *Christoffel* und *Lipschitz* in der Darstellung des Linienelements, durch *Sylvester, Halphen* und *Lie* in Gestalt der Reciprocanten oder Differentialinvarianten in die Theorie der Differentialgleichungen, durch *Beltrami's* Differentialparameter in die Lehre von der Flächenkrümmung Eingang gefunden. — Auch irrationale Invarianten sind durch Arbeiten von *Hilbert* aufgestellt worden.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung[65]) entstand unter den Händen von *Pascal* und *Fermat.* Im Jahr 1654 hatte ein Spieler, der *Chevalier de Méré,* an *Pascal* zwei Anfragen geschickt, welche sich aufs Spiel bezogen und folgendermassen lauteten: »Mit wie viel Würfen kann man im Brettspiel hoffen, zwei Sechsen zu werfen«; und: »in welchem Verhältnis muss man die Einsätze verteilen, wenn man das Spiel in einem gegebenen Moment unterbricht?«. Diese zwei Fragen, deren Lösung für *Pascal* ein leichtes war, gaben ihm die Veranlassung, die Fundamente einer neuen Wissenschaft zu legen, welche von ihm »Géométrie du hasard« genannt wurde. Auf die Einladung *Pascal's* wendete auch *Fermat* solchen Fragen seine Aufmerksamkeit zu und verwertete die Kombinationslehre in dem neuen Gebiet. Dem Beispiel der zwei französischen Mathematiker folgte unverweilt *Huygens;* er schrieb 1658 ein kleines Werk über Hazardspiele. Der erste, welcher die neue Rechnungsart auf die ökonomischen Wissenschaften anwandte, war der Grosspensionär *Jean de Witt,* der berühmte Schüler *Descartes'*. Er berichtete 1671 über die Art, wie man die Höhe der Lebensrente auf Grund einer Sterblichkeitstafel zu bestimmen habe. Auch *Hudde* machte Veröffentlichungen über denselben Gegenstand. — Eine zusammenfassende Behandlung

erfuhr die »Rechnung über den Zufall« durch *Jakob Bernoulli* in der acht Jahre nach dem Tod des Verfassers (1713) gedruckten »Ars conjectandi«, die allerdings fast begraben blieb, bis sich *Condorcet* ihrer annahm. Seit *Bernoulli* hat es kaum einen bedeutenden Algebraiker gegeben, der nicht für einzelne Betrachtungen aus dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung Zeit gefunden hätte.

Für die Methode der kleinsten Quadrate hat *Legendre* den Namen geschaffen in einer 1806 über diesen Gegenstand erschienenen Abhandlung. Die erste Veröffentlichung von *Gauss* über das gleiche Gebiet erfolgte 1809, obwohl er die ganze Methode schon 1795 besass. Es ist dies also eine *Gauss'sche* Methode, namentlich deshalb, weil *Gauss* sie zuerst in ihrer heutigen Gestalt ausbildete und in grossem Massstab praktisch verwertete. Die äussere Veranlassung dazu bildete die Entdeckung des ersten kleinen Planeten, der Ceres, am 1. Januar 1801 durch *Piazzi*. *Gauss* berechnete nach neuen Methoden die Bahn dieses Himmelskörpers so genau, dass derselbe gegen Ende des Jahres 1801 in der Nähe des von ihm angegebenen Ortes wieder aufgefunden werden konnte. Die an diese Arbeit sich anschliessenden Ausführungen erschienen 1809 als »Theoria motus corporum coelestium« etc. Dieses Werk enthielt die Bestimmung des Orts eines Himmelskörpers für eine beliebige Zeit unter Voraussetzung der bekannten Bahn, ferner die Lösung der schwierigen Aufgabe, aus drei Beobachtungen die Bahn zu finden. Um die so bestimmte Bahn einer grösseren Zahl von Beobachtungen möglichst anzupassen, verwendete *Gauss* das von ihm 1795 erfundene Verfahren. Dasselbe sollte »Beobachtungen, welche zur Bestimmung von unbekannten Grössen dienen, so kombinieren, dass die unvermeidlichen Beobachtungsfehler dem Wert der gesuchten Zahlen möglichst wenig schaden«. Zu diesem Zweck machte *Gauss* folgende Vor-

schrift[31]): »Man lege jedem Fehler ein von seiner Grösse abhängiges Moment bei, multipliziere das Moment jedes möglichen Fehlers in dessen Wahrscheinlichkeit und addiere die Produkte. Der Fehler, dessen Moment diesem Aggregat gleich ist, wird als mittlerer bezeichnet werden müssen.« Als willkürliche Funktion des Fehlers, welche Moment des letzteren werden soll, hat *Gauss* das Quadrat als einfachste Funktion dieser Art gewählt. — *Laplace* machte im Jahr 1812 einen ausführlichen Beweis für die Richtigkeit des *Gauss'schen* Verfahrens bekannt.

Zur Kombinationslehre finden sich elementare Aufstellungen aus dem 16. Jahrhundert, z. B. von *Cardano*. Eine erste grössere Arbeit rührt von *Pascal* her. Er knüpft an sein arithmetisches Dreieck an, um die Anzahl der Kombinationen von m Elementen zur $n$ten Klasse zu bestimmen. *Leibniz* und *Jacob Bernoulli* brachten durch ihre Untersuchungen viel neues bei. Gegen Ende des 18. Jahrhunderts wurde dieses Gebiet von einer Anzahl deutscher Gelehrter mit Vorliebe gepflegt: es entstand unter der Führung *Hindenburgs* die »kombinatorische Schule« [31]). Die Anhänger dieser mathematischen Richtung knüpften an die Entwicklung des binomischen Lehrsatzes an. Ihnen allen durch systematische Begründung überlegen ist *Hindenburg*, der die Polynome in eine erste Klasse von der Form $a + b + c + d + \ldots$ und in eine zweite $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ einteilte. Er ergänzte das schon Bekannte und lieferte zu einer Reihe von Sätzen die noch mangelnden Beweise, so dass er der Schöpfer des Systems der kombinatorischen Analysis genannt werden darf.

Die kombinatorische Schule, innerhalb deren ausser dem bedeutendsten Vertreter der Kombinatorik noch *Eschenbach*, *Rothe* und besonders *Pfaff* zu nennen sind, erzeugte eine sehr umfangreiche Litteratur und wusste sich durch ihre formell eleganten Resultate in ein gewisses Ansehen zu setzen. Sie stand aber mit ihren Bestrebungen so weit

ausserhalb des Bodens der namentlich von französischen Mathematikern wie *Lagrange* und *Laplace* gepflegten neuen und fruchtbaren Methoden, dass sie zunächst wenigstens auf die weitere Entwicklung der Mathematik im Anfang des 19. Jahrhunderts ohne Einfluss blieb.

Im Gebiet der unendlichen Reihen sind viele Fälle, die meist auf die geometrische Reihe zurückführen, von *Euklid*, und in umfangreicherem Masse von *Apollonius* behandelt worden. Das Mittelalter hatte nichts wesentliches hinzugefügt; erst die neuere Zeit lieferte Bereicherungen dieses Zweigs mathematischen Wissens. — *Saint-Vincent* und *Merkator* entwickelten unabhängig von einander die Reihe für $log\,(1 + x)$, *Gregory* die für $arc\,tg\,x$, $sin\,x$, $cos\,x$, $sec\,x$, $cosec\,x$. Bei dem letztgenannten Schriftsteller finden sich in der Behandlung der unendlichen Reihen auch die Ausdrücke »konvergent« und »divergent«. *Leibniz* wurde durch seine Beschäftigung mit endlichen arithmetischen Reihen auf unendliche Reihen geführt. Er fühlte zugleich das Bedürfnis, näheres über Konvergenz und Divergenz der Reihen zu erfahren; ebenso *Newton*, der die unendlichen Reihen ähnlich wie *Apollonius* zur Lösung algebraischer und geometrischer Probleme benutzt, namentlich zur Berechnung von Flächeninhalten, demnach als Ersatz von Integrationen.

Die von *Leibniz* neu eingeführten Ideen wurden durch *Jakob Bernoulli* und *Johann Bernoulli* weiter entwickelt. Ersterer bildete Summen von Reihen mit konstanten Gliedern, letzterer gab eine allgemeine Formel der Entwicklung einer Funktion in eine unendliche Reihe. Eigentliche Konvergenzkriterien gab es bis zu diesem Zeitpunkt noch nicht; nur für alternierende Reihen hatte *Leibniz* ein Erkennungszeichen der Konvergenz angegeben.

In der zunächst sich anschliessenden Zeit erfuhr die formelle Behandlungsweise der Reihen eine wesentliche Förderung. *Moivre* schrieb über rekurrente Reihen und erschöpfte ihre wesentlichen Eigenschaften fast vollständig.

Besonderer Bekanntschaft erfreuen sich die Reihen von *Taylor* und *Maclaurin*. Letzterer lieferte einen strengen Beweis von *Taylor's* Reihe, gab vielfache Anwendungen derselben und stellte neue Summenformeln auf. Die grösste formale Gewandtheit in der Behandlung unendlicher Reihen weist *Euler* auf, der sich aber wenig um Konvergenz und Divergenz kümmert. *Euler* leitete die Exponentialreihe aus der Binomialreihe ab und entwickelte als der erste rationale Funktionen in Reihen, die nach sinus und cosinus der ganzen Vielfachen des Arguments fortschreiten [86]). Dabei definierte er die Coëfficienten einer trigonometrischen Reihe durch bestimmte Integrale, ohne diese wichtigen Formeln auf die Darstellung willkürlicher Funktionen durch trigonometrische Reihen anzuwenden. Dies geschah erst durch *Fourier*, dessen Untersuchungen von *Riemann* und *Cauchy* vervollständigt und durch *Dirichlet* zu einem vorläufigen Abschluss gebracht worden sind, insofern letzterer durch strenge Methoden eine wissenschaftliche Begründung lieferte und namentlich allgemeinere und kompliziertere Untersuchungen über Konvergenz der Reihen anstellte [63]). Von *Laplace* rühren Reihenentwicklungen mit zwei Variabeln her, namentlich solche in rekurrente Reihen. *Legendre* veranlasste durch die Einführung der Kugelfunktionen eine nicht zu unterschätzende Erweiterung der Reihentheorie.

Mit *Gauss* bricht auch hier wie in fast allen anderen mathematischen Gebieten die Zeit exakter Behandlungsweise an, die Zeit der Aufstellung der einfachsten Konvergenzkriterien, der Untersuchung des Rests und der Fortsetzung der Reihen über ihren Konvergenzbereich hinaus. Die Einleitung hiezu bildet die berühmte Reihe von *Gauss*:

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots,$$

die zwar schon *Euler* behandelt, aber nicht in ihrem ganzen

Umfang gewürdigt hatte[86]). Die ganz allgemein angenommene Benennung dieser Reihe als »hypergeometrische Reihe« rührt von *J. F. Pfaff* her, der sie für die allgemeineren Reihen in Vorschlag brachte, bei welchen der Quotient eines Glieds in das folgende eine rationale Funktion des Stellenzeigers ist. Nach *Wallis* gebrauchte *Euler* denselben Namen für Reihen, in denen jener Quotient eine ganze Funktion ersten Grads des Stellenzeigers ist *). *Gauss*, wahrscheinlich veranlasst durch astronomische Anwendungen, gab an, dass seine Reihe unter Voraussetzung gewisser spezieller Werte für α, β, γ fast alle damals bekannten Reihen zu ersetzen imstande war; er untersuchte die wesentlichen Eigenschaften dieser Funktion und gab für Reihen überhaupt ein wichtiges Konvergenzkriterium. — *Abel* verdankt man wichtige Untersuchungen über die Stetigkeit der Reihen.

Der Begriff der gleichmässigen Konvergenz von Reihen ist aus dem Studium des Verhaltens der Reihen in der Nähe ihrer Sprungstellen entstanden und wurde fast gleichzeitig von *Stokes* und *Seidel* aufgestellt. Letzterer nennt eine Reihe dann gleichmässig konvergent, wenn sie zwar eine diskontinuierliche Funktion einer Grösse x darstellt, von der ihre einzelnen Glieder kontinuierliche Funktionen sind, aber in der Nähe der Sprungstellen so beschaffen ist, dass man Werte von x angeben kann, für welche die Reihe beliebig langsam konvergiert[86]).

Die Zeit der Entdeckung wirksamer Konvergenz- und Divergenzkriterien[85]) beginnt mit *Cauchy* (1821). Seine Untersuchungsmethoden, sowie die zwischen 1832 und 1851 von *Raabe*, *Duhamel*, *de Morgan*, *Bertrand*, *Bonnet*, *Paucker* veröffentlichten Sätze über unendliche Reihen mit positiven Gliedern stellen spezielle Kriterien auf, denn sie vergleichen durchweg das $n$te Reihenglied mit besonderen Funktionen

*) Riemann, Werke, S. 78.

von der Form a^n, n^k, $n\,(log\ n)^k$ und anderen. Kriterien von wesentlich allgemeinerem Charakter wurden zuerst durch *Kummer* (1835) aufgefunden, und von *Dini* (1867) verallgemeinert. *Dini's* Forschungen blieben zunächst wenigstens in Deutschland ganz unbekannt. Sechs Jahre später entdeckte *Paul du Bois Reymond*, von demselben Grundgedanken ausgehend wie *Dini*, abermals die Hauptresultate des italienischen Mathematikers, arbeitete sie gründlicher aus und vermehrte dieselben wesentlich zu einem System von Konvergenz- und Divergenzkriterien erster und zweiter Art, je nachdem sie das allgemeine Glied a_n der Reihe, oder den Quotienten $a_{n+1} : a_n$ der Untersuchung zu Grunde legen. Wesentlich vervollständigt und zum Teil berichtigt wurden die Resultate *Du Bois Reymond's* in neuester Zeit durch *A. Pringsheim.*

Nachdem die Auflösung der algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grads gelungen war, konnte an den Ausbau des Systems algebraischer Gleichungen überhaupt Hand angelegt werden. *Tartaglia*, *Cardanus* und *Ferrari* hatten die Schlusssteine in die Brücke eingefügt, welche von den Gleichungen zweiten Grads zur vollständigen Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grads sicher hinüberleitete. Aber es vergingen Jahrhunderte, bis durch einen *Abel* helles Licht über die höheren Fälle ausgegossen wurde.

Viète hatte zur Lösung von Gleichungen ein Mittel erfunden, das Aehnlichkeit mit dem Radizieren besitzt, und diese Methode wurde von *Harriot* und *Oughtred* weiter entwickelt, ohne dass es gelungen wäre, sie weniger mühsam zu machen [77]). *Harriot's* Name ist auch mit einem Satze (der Zeichenregel) verknüpft, welcher das Bildungsgesetz der Coëfficienten einer algebraischen Gleichung aus ihren Wurzeln enthält, obwohl dieser Satz erst von *Descartes* angegeben und von *Gauss* allgemein bewiesen wurde.

Da es an sicheren Methoden zur Bestimmung der Wurzeln

von Gleichungen höheren Grads fehlte, so suchte man wenigstens diese Verschwindungswerte in möglichst enge Grenzen einzuschliessen. Das wollten *de Beaune* und *Schooten* ausführen, aber brauchbare Methoden rühren erst von *Maclaurin* (1659) und *Newton* (1722) her. So gelang es denn, die reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung wenigstens zwischen beliebig enge Grenzen einzuschliessen. — Um zur allgemeinen Lösung einer algebraischen Gleichung zu gelangen, versuchte man entweder, die vorgelegte Gleichung als das Produkt mehrerer Gleichungen niedrigeren Grads darzustellen, was von *Hudde* weiter verfolgt wurde, oder man war bestrebt, eine Gleichung geraden Grads durch Quadratwurzelausziehen auf eine solche zu reduzieren, deren Gradzahl die Hälfte des Grads der gegebenen Gleichung ist, und diesen Weg betrat namentlich *Newton*, ohne besondere Erfolge verzeichnen zu können.

Auch *Leibniz* hatte sich ebenso ernstlich wie *Newton* bemüht, in der Theorie der algebraischen Gleichungen einen Schritt vorwärts zu thun. In einem seiner Briefe gibt er an, dass er sich lange damit beschäftigt habe, die irrationalen Wurzeln einer Gleichung beliebigen Grads durch Wegschaffung aller Mittelglieder aus der Form $x^n = A$ zu finden, und dass er der Ueberzeugung sei, man könne auf diese Weise zur vollständigen Lösung der allgemeinen Gleichung $n$ten Grads gelangen. Dieser Weg der Transformation der allgemeinen Gleichung geht auf *Tschirnhaus* zurück und findet sich [58]) als »Nova methodus« etc. in den Leipziger Acta eruditorum vom Jahr 1683. In der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0$$

setzt *Tschirnhaus*

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \mu x^{n-1};$$

die Elimination von x aus diesen beiden Gleichungen liefert für y ebenfalls eine Gleichung $n$ten Grads, in welcher man die

unbestimmten Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ dazu verwenden kann, der Gleichung in y gewisse spezielle Eigenschaften zu verleihen, z. B. einige Glieder zum Verschwinden zu bringen. Mit den y sind dann im allgemeinen auch die x bestimmt. Durch diese Methode wird die Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grads auf die einer Gleichung zweiten, beziehungsweise dritten Grads zurückgeführt; allein die Anwendung auf die Gleichung fünften Grads führt schon auf eine Gleichung vierundzwanzigsten Grads, von deren Behandlung die vollständige Lösung der Gleichung fünften Grads abhängig ist.

Nachdem auch gegen Ende des 17. und Anfang des 18. Jahrhunderts *De Lagny, Rolle, Laloubère* und *Leseur* vergebliche Anstrengungen gemacht hatten, mit strengen Lösungsmethoden über die Gleichung vierten Grads hinauszukommen, nahm *Euler* 1749 das Problem in Angriff. Er suchte zunächst die Gleichung vom Grad $2n$ in zwei Faktoren je vom Grade n zu zerlegen mit Hilfe der Einführung unbestimmter Coëfficienten; aber die von ihm erhaltenen Resultate waren nicht befriedigender als die seiner Vorgänger, indem eine Gleichung achten Grads bei dieser Behandlung auf eine Gleichung siebzigsten Grads führte. Doch konnte *Euler* bei solchen Arbeiten als eine schöne Frucht seiner Mühe den Beweis des Satzes betrachten, dass jede Gleichung geraden Grads in lauter rationale Faktoren zweiten Grads zerlegt werden kann.

In einer aus dem Jahr 1762 stammenden Arbeit griff *Euler* das Problem direkt an. Von den Gleichungen zweiten und dritten Grads ausgehend vermutete er, dass eine Wurzel der allgemeinen Gleichung $n$ten Grads aus $n-1$ Radikalen $n$ten Grads mit untergeordneten Quadratwurzeln zusammengesetzt werden könne. Er bildete derartige Ausdrücke und suchte durch Coëfficientenvergleichung seinen Zweck zu erreichen, was auch bis zum vierten Grad keine Schwierigkeiten bot; aber schon beim fünften Grad war *Euler* genötigt,

sich auf besondere Fälle zu beschränken. So erhielt er aus

$$x^5 - 40x^3 - 72x^2 + 50x + 98 = 0$$

folgenden Wert:

$$x = \sqrt[5]{-31 + 3\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-31 - 3\sqrt{-7}}$$
$$+ \sqrt[5]{-18 + 10\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-18 - 10\sqrt{-7}}.$$

Einige Aehnlichkeit mit diesem *Euler'schen* Verfahren besitzt das von *Waring* (1779). Um die Gleichung $f(x) = 0$ vom Grad n zu lösen, wird

$$x = a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^2} + c\sqrt[n]{p^3} + \ldots + q\sqrt[n]{p^{n-1}}$$

gesetzt; nach Wegschaffung der Radikale ergibt sich eine Gleichung $n$ten Grads $F(x) = 0$ und durch Coëfficientenvergleichung entstehen die zur Bestimmung von $a, b, c, \ldots q$ und p nötigen Gleichungen.

Auch *Bézout* stellte eine Methode auf. Er eliminierte aus den Gleichungen

$$y^n - 1 = 0, \quad ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots + x = 0$$

die y und erhielt eine Gleichung $n$ten Grads $f(x) = 0$. Das weitere Verfahren benützte Coëfficientenvergleichung. *Bézout* war ebensowenig wie *Waring* imstande, auf dem angegebenen Weg eine allgemeine Gleichung fünften Grads zu lösen, wohl aber gab ihm diese Frage den Anstoss zur Verbesserung der Eliminationsmethoden.

Tschirnhaus hatte mit seiner Transformation damit angefangen, die Wurzeln der allgemeinen Gleichung als Funktionen der Coëfficienten zu studieren. Derselbe Zweck kann auch durch eine andere, allerdings von der ersten nicht prinzipiell verschiedene Methode erreicht werden,

nemlich durch Resolventenbildung. Auf diesem Weg gelangten *Lagrange*, *Malfatti* und *Vandermonde* unabhängig von einander zu Ergebnissen, welche im Jahr 1771 veröffentlicht wurden. *Lagrange's* inhaltsreiche Arbeit gibt eine Analyse aller damals bekannten Methoden, Gleichungen zu lösen und beleuchtet die Schwierigkeiten, welche sich bei Ueberschreitung des vierten Grads erheben. Ausserdem gibt er Methoden zur Bestimmung der Grenzen der Wurzeln und der Zahl der imaginären Wurzeln, sowie Näherungsmethoden.

So hatten alle vor Beginn des 19. Jahrhunderts zur Lösung der allgemeinen Gleichung $n$ten Grads angewendeten Mittel nur Misserfolge gezeitigt, und namentlich angesichts der Arbeit von *Lagrange* sagt *Montucla* [77]: »Das alles ist ganz geeignet, den Eifer derjenigen abzukühlen, welche geneigt sind, diesen neuen Weg zu wandern. Muss man denn gänzlich an der Lösung dieses Problems verzweifeln?«

Da die allgemeine Aufgabe sich als unnahbar erwies, versuchte man es mit besonderen Fällen und erzielte auf diesem Wege in der That mehrere schöne Resultate. *De Moirre* brachte die Lösung der Gleichung

$$ny + \frac{n^2-1}{2.3} . ny^3 + \frac{n^2-1 . n^2-9}{2.3.4.5} . ny^5 + \ldots = a$$

für ganze und ungerade n in die Form:

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2+1}} - \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{-a - \sqrt{a^2+1}}.$$

Euler untersuchte die symmetrischen Gleichungen und *Bézout* stellte die Bedingung zwischen den Coëfficienten einer Gleichung $n$ten Grads auf, welche erfüllt sein muss, damit dieselbe in die Form $y^n + a = 0$ übergeführt werden kann.

Einen besonders bedeutungsvollen Schritt that *Gauss* mit der Lösung der Kreisteilungsgleichung

$$x^n - 1 = 0,$$

wo n eine Primzahl ist. Gleichungen dieser Art stehen in engster Beziehung zur Teilung des Kreisumfangs in n gleiche Teile. Ist nemlich y die Seite des einem Kreis vom Halbmesser 1 einbeschriebenen regulären Vielecks mit n Seiten, und z die Verbindungsstrecke der ersten und dritten Ecke dieses Vielecks, so findet sich:

$$y = 2 \,.\, sin\, \frac{\pi}{n}, \quad z = 2\, sin\, \frac{2\pi}{n}.$$

Setzt man aber

$$x = cos\, \frac{2\pi}{n} + i\, sin\, \frac{2\pi}{n}, \quad \left(cos\, \frac{2\pi}{n} + i\, sin\, \frac{2\pi}{n}\right)^n = 1,$$

so ist die Gleichung $x^n - 1 = 0$ als algebraischer Ausdruck der Frage nach der Konstruktion des regulären n-Ecks zu betrachten.

Von *Gauss*[64]) wurde folgender sehr allgemeine Satz bewiesen: »Ist n eine Primzahl, und hat man die Zahl $n - 1$ in Primfaktoren $a, b, c, \ldots$ zerlegt, so dass $n - 1 = a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots$, dann lässt sich die Lösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$ immer zurückführen auf diejenige mehrerer Gleichungen niedrigeren Grads, nemlich auf α Gleichungen vom Grad a, auf β Gleichungen vom Grad b, etc.« So wird beispielsweise die Lösung der Gleichung $x^{73} - 1 = 0$ (die Teilung des Kreisumfangs in 73 gleiche Teile), da $n - 1 = 72 = 2^3 \,.\, 3^2$ ist, dadurch erhalten, dass man drei quadratische und zwei kubische Gleichungen behandelt. $x^{17} - 1 = 0$ führt wegen $n - 1 = 16 = 2^4$ auf vier Gleichungen zweiten Grads; man kann also das reguläre Siebenzehneck elementargeometrisch konstruieren, eine Thatsache, welche vor *Gauss* niemand geahnt hatte.

Ins einzelne ausgeführte elementargeometrische Konstruktionen des regulären Siebenzehnecks sind zuerst von

Pauker und *Erchinger* aufgestellt worden*). Eine bemerkenswerte Konstruktion derselben Figur rührt von *v. Staudt* her.

Für den Fall, dass die Primzahl n die Form $2^m + 1$ hat, wird die Auflösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$ immer auf die von m quadratischen Gleichungen zurückgeführt, von denen man sogar nur $m - 1$ nötig hat, wenn es sich um die Konstruktion des regulären n-Ecks handelt. Zu beachten ist hiebei, dass nur für $m = 2k$ (k eine ganze positive Zahl) der Ausdruck $2m + 1$ eine Primzahl sein kann, aber, wie *R. Baltzer* [79]) gezeigt hat, nicht notwendig sein muss. Wählt man der Reihe nach für m die Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 16,\ 2^{12},\ 2^{23},$$

so ergeben sich für $n = 2^m + 1$ die entsprechenden Zahlen:

$$3,\ 5,\ 9,\ 17,\ 33,\ 65,\ 129,\ 257,\ 65537,\ (2)^{2^{12}} + 1,\ (2)^{2^{23}} + 1,$$

von welchen nur 3, 5, 17, 257, 65 537 Primzahlen sind; die übrigen Zahlen sind zusammengesetzt; insbesondere haben die zwei letzten Werte für n beziehungsweise die Faktoren 114 689 und 167 772 161. Es lässt sich also der Kreis in 257 oder 65 537 gleiche Teile teilen, dadurch dass man bezüglich 7 oder 15 quadratische Gleichungen auflöst, was durch Konstruktion elementargeometrisch möglich ist.

Beachtet man die Zerlegungen:

$$255 = 2^8 - 1 = (2^4 - 1)(2^4 + 1) = 15 \,.\, 17, \qquad 256 = 2^8,$$
$$65535 = 2^{16} - 1 = (2^8 - 1)(2^8 + 1) = 255 \,.\, 257, \quad 65536 = 2^{16},$$

so ist ersichtlich, dass der Kreis elementargeometrisch, d. h. nur unter Anwendung des Zirkels und Lineals, in

255, 256, 257; 65 535, 65 536, 65 537

gleiche Teile geteilt werden kann. Unmittelbar lässt sich diese Reihe nicht fortsetzen, da $n = 2^{32} + 1$ keine Primzahl ist.

Die Möglichkeit der elementargeometrischen Konstruktion des regulären 65 535-Ecks erhellt aus folgender Zerlegung:

$$65\,535 = 255 \,.\, 257 = 15 \,.\, 17 \,.\, 257.$$

Ist nun der Kreisumfang gleich 1 gesetzt, so wird

$$\tfrac{1}{15} - \tfrac{1}{17} = \tfrac{2}{255}, \quad \tfrac{1}{255} - \tfrac{1}{257} = \tfrac{2}{65537},$$

also ist $\frac{1}{65537}$ des Umfangs durch Ausführung elementar-geometrischer Operationen bekannt.

---

*) Gauss, Werke, II, S. 187.

Nachdem *Gauss* schon in seiner frühesten wissenschaftlichen Arbeit, der Doktordissertation, den ersten seiner Beweise für den wichtigen Satz, dass jede algebraische Gleichung eine reelle oder komplexe Wurzel hat, gegeben, sprach er in der grossen zahlentheoretischen Abhandlung von 1801 die Vermutung aus, dass es unmöglich sein dürfte, allgemeine Gleichungen von höherem als dem vierten Grad durch Wurzelgrössen aufzulösen. Für diese Vermutung lieferten *Ruffini* und *Abel* den strengen Beweis, und diesen Untersuchungen ist es zu danken, dass die fruchtlosen Bemühungen, auf algebraischem Weg zur allgemeinen Auflösung der Gleichungen zu gelangen, ein Ende erreichten. Dafür trat die von *Abel* formulierte Frage in den Vordergrund: »Welches sind die Gleichungen gegebenen Grads, die sich algebraisch lösen lassen?«

Eine solche Gruppe von Gleichungen bilden eben die *Gauss'schen* Kreisteilungsgleichungen. Aber *Abel* gelangte zu einer wichtigen Verallgemeinerung durch den Satz, dass eine irreducible Gleichung immer dann durch Radikale lösbar ist, wenn von zwei Wurzeln derselben die eine sich rational durch die andere ausdrücken lässt, wofern gleichzeitig der Grad der Gleichung eine Primzahl ist; wenn letzteres nicht der Fall ist, so kommt die Auflösung auf die Lösung von Gleichungen niedrigeren Grades zurück.

In diesen *Abel'schen* Gleichungen ist also eine weitere grosse Gruppe von algebraisch lösbaren Gleichungen irgend eines Grades abgegrenzt. Aber die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die algebraische Lösbarkeit einer Gleichung fand ihre Beantwortung erst durch den jugendlichen *Galois,* dessen Untersuchungen in dem Satze gipfeln: »Ist der Grad einer irreducibeln Gleichung eine Primzahl, so ist diese Gleichung unter alleiniger Anwendung von Wurzelgrössen lösbar, sobald die Wurzeln dieser Gleichung aus zwei gegebenen unter ihnen sich rational herleiten lassen.«

Abels Untersuchungen fallen zwischen 1824 und 1829, diejenigen von *Galois* in die Jahre 1830 und 1831. Ihre fundamentale Bedeutung für alle weiteren Arbeiten in diesem Gebiete ist unbestrittene Thatsache; allein die Frage nach dem allgemeinen Typus der algebraisch lösbaren Gleichungen harrt noch ihrer Beantwortung*).

Galois, welcher sich auch um die Theorie der in der Lehre von den elliptischen Funktionen auftretenden Modulargleichungen besondere Verdienste erworben hat, führte den Begriff einer Gruppe von Substitutionen[79]) ein. Die Wichtigkeit dieser Neuerung und ihre Ausbildung zu einer förmlichen Substitutionentheorie, wie sie *Cauchy* als erster in den »Exercices d'analyse etc.«, wo er von »Systemen konjugierter Substitutionen« spricht, gegeben hat, wurde durch geometrische Betrachtungen wesentlich gefördert. Das erste Beispiel hiefür lieferte *Hesse*[80]) durch seine Untersuchung über die neun Wendepunkte der Kurve dritter Ordnung. Die Gleichung neunten Grads, von welcher sie abhängen, gehört zur Klasse der algebraisch lösbaren, und zwar besteht zwischen je zweien von den Wurzeln und einer durch sie bestimmten dritten eine algebraische Relation als Ausdruck der geometrischen Thatsache, dass die neun Wendepunkte zwölfmal zu je dreien in einer Geraden liegen. Für die Ausbildung der Substitutionentheorie haben in neuerer Zeit besonders *Kronecker*, *Klein*, *Noether*, *Hermite*, *Jordan*, *Capelli*, *Sylow* gewirkt.

An den vielfachen Bestrebungen, die Gleichung fünften Grads zu lösen, haben sich die meisten Algebraiker der neueren Zeit beteiligt. Ehe die Unmöglichkeit der algebraischen Lösung bekannt war, hatte *Jacobi* schon im Alter von 16 Jahren einen Versuch in dieser Richtung unternommen; aber ein wesentlicher Fortschritt war erst von

---

*) Abhandlungen von Abel und Galois, deutsch von Maser.

der Zeit an zu verzeichnen, als man die Auflösung der Gleichung fünften Grads mit der Lehre von den elliptischen Funktionen in Verbindung setzte[57]). Mit Hilfe von Transformationen, wie sie einerseits von *Tschirnhaus*, andererseits von *E. S. Bring* (1786) angegeben worden sind, kann man es erreichen, dass die Wurzeln der Gleichung fünften Grads nur von einer einzigen Grösse abhängig erscheinen, dass also der Gleichung nach *Hermite* die Form $t^5 - t - A = 0$ beigelegt werden kann. Durch *Riemann'sche* Methoden wird die Abhängigkeit der Wurzeln dieser Gleichung von dem Parameter A veranschaulicht; andererseits ist es möglich, durch Potenzreihen diese fünf Wurzelwerte mit beliebigem Grad der Annäherung zu berechnen. Im Jahr 1858 lösten *Hermite* und *Kronecker* die Gleichung fünften Grads durch elliptische Funktionen, aber ohne Beziehung zur algebraischen Theorie dieser Gleichung, während *Klein* zu einer möglichst einfachen Lösung durch transcendente Funktionen unter Benützung der Theorie des *Ikosaeders* gelangte.

So ist also die Auflösung von allgemeinen Gleichungen $n$ten Grads für $n > 4$ durch transcendente Funktionen möglich geworden, und die hiebei vorkommenden Operationen sind folgende*): Auflösung von Gleichungen niedrigeren Grads; Lösung von linearen Differentialgleichungen mit bekannten singulären Punkten; Bestimmung der Integrationskonstanten durch Berechnung von Periodicitätsmoduln hyperelliptischer Integrale, für welche die Verzweigungspunkte der zu integrierenden Funktion bekannt sind; endlich die Berechnung von Thetafunktionen mehrerer Veränderlichen für besondere Werte der Argumente.

Die Durchführung der zur vollständigen Lösung einer algebraischen Gleichung führenden Methoden ist in vielen Fällen zeitraubend und mühsam; deswegen besitzen die Anweisungen zur genäherten Bestimmung reeller Wurzelwerte eine nicht zu unterschätzende Bedeutung,

---

*) Lindemann, s. Fortschritte 1884.

namentlich soweit sich dieselben auf transcendente Gleichungen ausdehnen lassen. Die allgemeinste Näherungsmethode ist die von *Newton* (an *Barrow* 1669 mitgeteilt), zu welcher auch *Halley* und *Raphson* auf anderem Wege gelangten[77]. Für die Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grads sind besonders jene Näherungsmethoden geeignet, welche *Johann Bernoulli* in den »Lectiones calculi integralis« ausgeführt hat. Weitere Näherungsmethoden rühren von *Daniel Bernoulli*, *Taylor*, *Thomas Simpson*, *Lagrange*, *Legendre* und anderen her.

Auch auf graphischem oder mechanischem Wege können Verschwindungswerte einer Gleichung angenähert bestimmt werden. *C. V. Boys**) benützt hiezu eine Maschine, die aus einem System von Hebeln mit Wagschalen besteht; *Cunyngham**) eine kubische Parabel mit einer Tangentenskala auf einem Lineal; *C. Reuschle***) eine Hyperbeltafel mit zugehöriger Gelatine-Tafel, so dass die Wurzelwerte als Schnitt einer Hyperbel und Parabel abgelesen werden können. Derartige Methoden, namentlich für Gleichungen dritten und vierten Grads berechnet, rühren noch her von *Bartl*, *R. Hoppe* und *Oekinghaus* †).

Zur Auflösung der Gleichungen war im 17. Jahrhundert ein Algorithmus erfunden worden, der sich seitdem in allen Gebieten der Mathematik das Heimatrecht erworben hat — der Algorithmus der Determinanten. Die erste Anregung zur Rechnung mit den gesetzmässig gebildeten Aggregaten, die man jetzt nach dem Vorgang von *Cauchy* Determinanten nennt, ist im Jahr 1693 von *Leibniz* gegeben worden[4a]. Er benützte die von ihm der Hauptsache nach schon in der Form

$$\begin{array}{llll} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{array}$$

*) Nature XXXIII, 166. — **) O. Böklen, Math. Mitteilungen, 1886, S. 102. — †) Fortschritte 1883; 1884.

aufgestellten Aggregate zur Bildung der Resultante von n linearen Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten und von zwei algebraischen Gleichungen mit einer Variabeln. Als zweiter Erfinder gilt *Cramer* (1750), weil er anfing, ein System der Rechnung mit Determinanten auszuarbeiten. Weitere Sätze rühren her von *Bézout*, *Vandermonde*, *Laplace* und *Lagrange*. Einen wesentlichen Fortschritt bewirkten *Gauss*' »Disquisitiones arithmeticae«, welche *Cauchy* zu vielen neuen Betrachtungen Veranlassung gaben, so namentlich zur Entwicklung des allgemeinen Gesetzes über die Multiplikation zweier Determinanten.

Jacobi leistete vermöge seiner »Meisterschaft in der Technik« auch für die Determinantenlehre hervorragendes, indem er eine ausgebildete Theorie der Ausdrücke schuf, welche von ihm als »Funktionaldeterminanten« bezeichnet wurden. Die Analogie dieser Determinanten mit den Differentialquotienten führte ihn zu dem allgemeinen »Prinzip des letzten Multiplikators«, der bei fast allen Integrationsproblemen eine Rolle spielt[26]). Von *Hesse* wurden besonders eingehend symmetrische Determinanten betrachtet, deren Elemente lineare Funktionen der Koordinaten eines geometrischen Gebildes sind. Er beobachtete ihr Verhalten bei linearer Transformation der Variabeln und ihre Beziehungen zu solchen Determinanten, welche durch eine einzige Ränderung aus ihnen hervorgehen[80]). Spätere Abhandlungen rühren her von *Cayley* über schiefe Determinanten, von *Nachreiner* und *S. Günther* über Beziehungen zwischen Determinanten und Kettenbrüchen.

Eine der grossartigsten neuen Erscheinungen dieser Periode bildet das Auftreten der Differentialrechnung. Die vorbereitenden Ideen dieser Erfindung treten in deutlichen Umrissen zuerst bei *Cavalieri* auf[71]), der in dem Werke »Methodus indivisibilium« eine Raumgrösse als Summe von unendlich vielen einfachsten Raumgrössen der nächst niederen Dimension, z. B. einen Körper als Summe von unendlich

vielen Ebenen betrachten lehrt. Das Missliche dieser Auffassung wurde von dem Erfinder der Methode wohl gefühlt, aber erst von *Pascal*, der eine Fläche aus unendlich vielen, unendlich schmalen Rechtecken zusammensetzt, von *Fermat* und *Roberval* verbessert; nur stellte sich bei allen Verfahrungsweisen der Uebelstand heraus, dass man die auftretenden Reihen selten zu summieren vermochte. Von *Keppler* war die Bemerkung gemacht worden, dass sich eine Funktion in der Nähe eines grössten oder kleinsten Werts nur sehr wenig ändern kann. Aus diesem Gedanken leitete *Fermat* ein Verfahren her, um das Maximum oder Minimum einer Funktion zu bestimmen. *Roberval* behandelte die Aufgabe, an eine Kurve eine Tangente zu legen, und förderte sie dadurch, dass er (1640) die krumme Linie durch Zusammensetzung zweier Bewegungen erzeugte und zur Konstruktion der Tangente das Parallelogramm der Geschwindigkeiten anwandte. *Barrow*, der Lehrer *Newton's*, benutzte diese Vorarbeiten mit Berücksichtigung der *Descartes'schen* Koordinatengeometrie. Als Geschwindigkeitsparallelogramm wählte er das Rechteck, und zugleich führte er wie *Fermat* unendlich kleine Grössen als Zuwächse der abhängigen und unabhängigen Veränderlichen mit besonderen Zeichen ein. Auch gab er die Regel, dass unbeschadet der Richtigkeit einer Rechnung die höheren Potenzen unendlich kleiner Grössen gegen die erste Potenz derselben vernachlässigt werden dürfen. Mit Brüchen und Wurzelausdrücken unendlich kleiner Grössen vermochte aber *Barrow* nicht zu rechnen; er musste darauf Bedacht nehmen, sie durch Umformung zu entfernen. Wie seine Vorgänger, war *Barrow* nur in den einfacheren Fällen imstande, den Wert eines Quotienten zweier unendlich kleiner Grössen oder einer Summe von unendlich vielen solcher Grössen zu bestimmen. Die allgemeine Lösung derartiger Fragen erfolgte durch *Leibniz* und *Newton*, die Begründer der Differentialrechnung.

Leibniz gab zunächst für die in ihren ersten Anfängen

schon eingeführte Rechnung mit unendlich kleinen Grössen weitere Beispiele und Regeln für zusammengesetztere Fälle. Durch Summierung nach alter Weise [31]) fand er die einfachsten Sätze der Integralrechnung, welche er unter Anwendung eines langgezogenen S als Summenzeichen folgendermassen schrieb:

$$\int x = \frac{x^2}{2}, \quad \int x^2 = \frac{x^3}{3}, \quad \int (x + y) = \int x + \int y.$$

Aus der Thatsache, dass das Summenzeichen $\int$ die Dimension erhöht, zog er den Schluss, dass durch Differenzenbildung die Dimension erniedrigt werden müsse, dass also, wie er in einem Manuscript vom 29. Oktober 1675 schreibt,

$$\text{aus } \int l = ya \text{ sofort } l = \frac{ya}{d} \text{ folge.}$$

Leibniz prüfte die Kraft seiner neuen Betrachtungsweisen an geometrischen Problemen; er suchte beispielsweise die Kurve zu bestimmen, für welche »die Abschnitte der Axe bis zu den Fusspunkten der Normalen sich wie die Ordinaten verhalten«. Hiebei liess er die Abscissen x in arithmetischer Reihe fortschreiten und bezeichnete die konstante Differenz der Abscissen anfangs mit $\frac{x}{d}$, später mit dx, ohne sich über die Bedeutung seiner Bezeichnung ausführlicher auszusprechen. Im Jahr 1676 hatte *Leibniz* sein neues Rechnungsverfahren so weit gefördert, dass er imstande war, geometrische Aufgaben, welche durch andere Methoden nicht bezwungen werden konnten, zu lösen. Erst 1686 jedoch veröffentlichte er einiges über seine Methoden, deren grosse Tragweite von *Jakob Bernoulli* sofort erkannt und verwertet wurde.

Was *Leibniz* bei der Ausführung seiner Methoden zu erklären unterlassen hatte, nemlich was man sich unter seinen

unendlich kleinen Grössen vorzustellen habe, findet sich bei *Newton* klar ausgesprochen, und das sichert ihm in dieser Hinsicht eine theoretische Ueberlegenheit. Von einem Quotienten zweier unendlich kleinen Grössen spricht *Newton* als von einem Grenzwert[71]), welchem sich das Verhältnis der verschwindenden Grössen nähert, je kleiner diese werden. Aehnliches gilt für eine Summe von unendlich vielen solcher Grössen. Zur Bestimmung des Grenzwertes ersann *Newton* einen besonderen Algorithmus, die Fluxionsrechnung, welche mit *Leibnizens* Differentialrechnung wesentlich identisch ist. Bei *Newton* kommt die Veränderung der Variabeln durch ein Fliessen zustande; er sucht die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit welcher sich die Funktion ändert, wenn die Aenderung an der Variabeln eine gegebene Geschwindigkeit besitzt. Diese Geschwindigkeiten heissen Fluxionen und werden mit $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ (statt wie bei *Leibniz* mit dx, dy, dz) bezeichnet[22]); die Grössen selbst sind die Fluenten, und die Fluxionsrechnung bestimmt also zu gegebenen Bewegungen die Geschwindigkeiten, oder sie sucht umgekehrt die Bewegungen zu finden, wenn das Gesetz ihrer Geschwindigkeiten bekannt ist. Die hierauf bezügliche Schrift *Newton's* wurde 1671 als »Methodus fluxionum« vollendet, aber erst nach seinem Tod im Jahr 1736 herausgegeben. Den Begriff der Fluxion hat *Newton* einer Arbeit *Napier's* entlehnt[22]).

Nach der Ansicht von *Gauss*[71]) hat sich *Newton* viel grössere Verdienste erworben als *Leibniz*, dem er zwar hohes Talent zuspricht, das sich aber allzusehr zersplittert habe. Es scheint, dass dieses Urteil nach beiden Seiten hin nicht ganz den wirklichen Verhältnissen entspricht. *Leibniz* lässt es an der genügenden Beleuchtung gerade desjenigen Vorgangs fehlen, welcher *Newton* zu einer seiner wichtigsten Neuerungen, zum Begriff der Grenze geführt hat. Dagegen ist *Newton* in der rein analytischen Begründung und Durchführung seiner Fluxionslehre nicht immer ganz klar,

während *Leibniz* sich durch Einführung der sehr angemessenen Bezeichnungen $\int$ und dx, sowie durch Aufstellung der Regeln, wie mit diesen Zeichen zu operieren ist, ein Hauptverdienst erworben hat. »Heute dürfte die Meinung feststehen, dass die Differential- und Integralrechnung von *Newton* und *Leibniz* unabhängig gefunden worden ist; dass *Newton* ohne Zweifel der erste Erfinder ist, dass *Leibniz* seinerseits selbständig diese Rechnungsart entdeckte, angeregt durch die von *Newton* ihm mitgeteilten Resultate, aber ohne von *Newtons* Methoden etwas zu wissen, und dass endlich *Leibniz* die Priorität der ersten Veröffentlichung hat [71]).«

Der systematische Ausbau der neuen Rechnungsweise machte ein Eingehen auf den Begriff des Unendlichen notwendig. Allerdings sind für die Naturerklärung die Forschungen über das Unmessbargrosse nur müssiger Natur *), während es sich mit den Fragen über das Unmessbarkleine ganz anders verhält. — Das Unendlichkleine [62]) erscheint bei *Keppler*, ebenso bei *Cavalieri* und *Wallis* unter schwankender Form, der Hauptsache nach als »unendlich kleiner Nullwert«, d. h. als eine Grösse, welche kleiner ist als jede gegebene Grösse, und welche die Grenze einer gewissen endlichen Grösse bildet. Systematisch führen in dieser Richtung *Euler*'s »indivisibilia« weiter. — Mit »Unbegrenztkleinem« operieren *Fermat*, *Roberval*, *Pascal*, insbesondere aber *Leibniz* und *Newton*, doch so, dass häufig eine abgekürzte Redeweise den wahren Sinn der Entwicklung verdeckt oder wenigstens verdunkelt. Bei *Johann Bernoulli*, *de L'hospital*, *Poisson* erscheint das Unendlichkleine als eine von Null verschiedene Grösse, welche doch kleiner als jeder angebbare Wert werden muss, d. h. als »pseudo-unendlichklein«. — *Lagrange* [71]) hat den Versuch gemacht, durch Aufstellung von Derivationen, welche freilich im Grunde mit *Newton*'s Fluxionen identisch sind,

---

*) Riemann, Werke, S. 267.

das Unendlichkleine ganz zu vermeiden, aber seine Ausführungen haben nur dazu gedient, das Bedürfnis nach einer tieferen Begründung der Theorie des Unendlichkleinen, welcher *Taquet* und *Pascal* im 17., *Maclaurin* und *Carnot* im 18. Jahrhundert vorgearbeitet hatten, immer dringender hervortreten zu lassen. Diese Begründung verdankt man den Untersuchungen *Cauchy's*; durch sie wurde in klarer Weise der Sinn von Sätzen festgestellt, welche den Ausdruck »unendlichklein« enthalten, und damit war eine sichere Grundlage für die Differentialrechnung geschaffen.

Die Integralrechnung wurde zunächst durch *Cotes* weitergeführt, der rationale algebraische Funktionen zu integrieren lehrte. *Legendre* beschäftigte sich mit der Integration von Reihen, *Gauss* mit der angenäherten Bestimmung von Integralen, *Jacobi* mit der Reduktion und Auswertung vielfacher Integrale. — Allgemeines über bestimmte Integrale hat man besonders *Dirichlet* zu verdanken, der in seinen Vorlesungen diese Theorie mit grosser Vorliebe behandelte[63]), die zerstreuten Resultate derselben in ein zusammenhängendes Ganzes verschmolz und durch eine neue eigenartige Integrationsmethode bereicherte. Die Einführung eines diskontinuierlichen Faktors gestattete ihm, für die gegebenen Grenzen der Integrationen andere, weitere, namentlich auch unendlich weite Grenzen einzuführen, ohne dadurch den Wert des Integrals zu ändern. — Durch die neueren Untersuchungen ist das Integral ein Mittel geworden, das dazu dienen kann, Funktionen zu definieren oder neue Funktionen zu erzeugen.

Im Gebiet der Differentialgleichungen reichen die nennenswerten Arbeiten zurück auf *Riccati*. Das Verdienst desselben bestand hauptsächlich darin, *Newton'sche* Philosophie in Italien eingeführt zu haben. *Riccati* inte-

grierte die nach ihm benannte Differentialgleichung in besonderen Fällen und diskutierte die Frage nach der Möglichkeit der Erniedrigung der Ordnung einer gegebenen Differentialgleichung. *Daniel Bernoulli* gab eine vollständige Lösung von *Riccati's* Gleichung. Auch *Trembley* leistete Beiträge zur Entwicklung der Lehre von den Differentialgleichungen. Eine ausführliche wissenschaftliche Behandlung erfuhr diese Lehre aber erst durch *Lagrange*, namentlich so weit dies die partiellen Differentialgleichungen betrifft, von denen *D'Alembert* und *Euler* die Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dx^2}$$

behandelt hatten. Auch *Laplace* schrieb über diese Differentialgleichung, ausserdem noch über die Reduktion der Lösung linearer Differentialgleichungen auf bestimmte Integrale.

Auf deutschem Boden hatte der mit *Gauss* befreundete *J. F. Pfaff*, nächst *Gauss* der bedeutendste deutsche Mathematiker jener Zeit, feinsinnige Untersuchungen über Differentialgleichungen angestellt [12]), welche für *Jacobi* den Anlass zur Einführung des Namens »*Pfaff'sches* Problem« bildeten. *Pfaff* fand auf einem eigentümlichen Wege die allgemeine Integration der partiellen Differentialgleichungen des ersten Grads für eine beliebige Anzahl von veränderlichen Grössen. Anknüpfend an die Lehre von den gewöhnlichen Differentialgleichungen ersten Grads mit n Variabeln, für welche in besonders einfachen Fällen Integrationen von *Monge* herrühren, gibt *Pfaff* zunächst deren allgemeine Integration und betrachtet dann die Integration der partiellen Differentialgleichungen als besonderen Fall von jener, wobei allerdings die allgemeine Integration der Differentialgleichungen jeden Grads zwischen zwei Variabeln als bekannt vorausgesetzt wird*). — Auch *Jacobi*

---

*) Gauss, Werke III, 232.

förderte die Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung. Es handelte sich darum, unbekannte Funktionen [20]) so zu bestimmen, dass ein Integral, welches diese Funktionen und deren Differentialquotienten auf vorgeschriebene Weise enthält, ein Maximum oder Minimum erreiche. Die Bedingung hiefür bildet das Verschwinden der ersten Variation des Integrals, was wieder seinen Ausdruck in Differentialgleichungen findet, aus welchen sich die unbekannten Funktionen bestimmen. Um aber entscheiden zu können, ob ein wirkliches Maximum oder Minimum eintritt, ist es nötig, die zweite Variation auf eine zur Untersuchung ihres Zeichens geeignete Form zu bringen. Dies führt auf neue Differentialgleichungen, welche *Lagrange* nicht zu lösen vermochte, von denen aber *Jacobi* imstande war zu zeigen, dass ihre Integration aus der Integration der zur ersten Variation gehörigen Differentialgleichungen abgeleitet werden kann. *Jacobi* hatte den besonderen Fall eines einfachen Integrals mit einer unbekannten Funktion untersucht; seine Angaben sind von *Hesse* vollständig bewiesen worden. Die allgemeine Untersuchung der zweiten Variation unternahm *Clebsch*, und ihm gelang es sogar für den Fall vielfacher Integrale zu zeigen, dass zur Reduktion der zweiten Variation neue Integrale nicht erforderlich sind. *Clebsch* förderte auch, einigen Andeutungen *Jacobi's* folgend, die Lösung des *Pfaff'schen* Problems, indem er es auf Systeme gleichzeitiger linearer partieller Differentialgleichungen zurückführte, deren Angabe ohne Integration möglich ist. Von anderen Untersuchungen ist eine der wichtigsten die Aufstellung der Gleichung

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0,$$

auf welche *Dirichlet* bei seinen Arbeiten über das Potential gestossen war. Die neueren Untersuchungen über Differentialgleichungen, besonders über lineare, von *Fuchs*, *Klein*

und *Point-Caré* stehen in enger Beziehung zur Funktionen- und Gruppentheorie, sowie zur Theorie der Gleichungen und der Reihen.

Kurze Zeit nach der Entdeckung der Differential- und Integralrechnung, nemlich im Jahr 1696, legte *Johann Bernoulli* *) den Mathematikern seiner Zeit eine Aufgabe der Variationsrechnung vor: es sollte diejenige Kurve gezogen werden, auf welcher ein Körper vom gegebenen Punkt A zu einem andern gegebenen Punkt B in der kürzesten Zeit fällt; es war also eine Funktion zu finden, deren Integral ein Minimum wird. Die Anregung zu dieser Aufgabe hatte die Optik geliefert. *Huygens* hatte die Wellentheorie des Lichts entwickelt und *Johann Bernoulli* unter bestimmten Voraussetzungen die Differentialgleichung der Bahn des Lichtstrahls gefunden. Für eine solche Bewegung suchte er nach einem andern Beispiel und kam auf die Cykloide als Brachistochrone, d. h. auf die obige Fassung der Aufgabe, für welche bis Ostern 1697 Lösungen von dem *Marquis de l'Hospital*, von *Tschirnhaus*, *Newton*, *Jakob Bernoulli* und *Leibniz* eingingen. Nur die beiden letzteren haben das Theorem als Maximal- und Minimal-Aufgabe behandelt. Die Methode *Jakob Bernoulli's* blieb bis auf *Lagrange* zur Behandlung ähnlicher Fälle die herrschende. Als eigentlicher Begründer der Variationsrechnung ist demnach *Jakob Bernoulli* anzusehen. — In jener Zeit [1]) nannte man alle Aufgaben, welche die Aufstellung einer Maximal- oder Minimaleigenschaft von Funktionen verlangten, isoperimetrische Probleme. Zu den ältesten Aufgaben der genannten Art gehörten nemlich solche, bei denen aus einer Klasse von Kurven gleichen Umfangs eine mit einer Maximal- oder Minimaleigenschaft ausgeschieden werden sollte. Dass der

---

*) Reiff, s. Math. Mitteilungen von Böklen; 1887, S. 90.

Kreis unter allen isoperimetrischen Figuren ein Maximum der eingeschlossenen Fläche gibt, soll schon *Pythagoras* gewusst haben. Bei *Pappus* findet sich eine Reihe von Sätzen über Figuren gleichen Umfangs. Auch im 14. Jahrhundert hatten sich italienische Mathematiker mit Fragen dieser Art beschäftigt. Zur Ausbildung einer Wissenschaft aber führten erst die analytisch-geometrischen Lösungen des isoperimetrischen Problems, wie solche von *Jakob Bernoulli* zuerst, dann später auch von *Brook Taylor* (1717) und von *Colin Maclaurin* (1742) herstammen. — *Euler* untersuchte bei der Behandlung desselben Problems zunächst in der Weise *Jakob Bernoulli's*, kam aber, nachdem er sich acht Jahre mit dem Gegenstand beschäftigt hatte, durch eine rein analytische Methode 1744 (in seinem berühmten Werk: »Methodus inveniendi lineas curvas« etc.) zu einer neuen und allgemeinen Lösung, welche zeigt, wie man aus der Variation einer Kurvenordinate diejenige der Funktion ableiten kann, welche einen grössten oder kleinsten Wert annehmen soll. — Den letzten wesentlichen Schritt von der punktweisen Variation *Euler's* und seiner Vorgänger zur gleichzeitigen Variation aller Ordinaten der gesuchten Kurve unter der Annahme variabler Grenzen des Integrals that *Lagrange* (»Essai d'une nouvelle méthode« etc. 1760 und 1761). Seine Methoden, die sich als etwas neues schon äusserlich durch Einführung des δ für die Aenderung der Funktion kennzeichneten, fanden später Aufnahme in *Euler's* Integralrechnung. Seitdem hat die Variationsrechnung zur Lösung von Aufgaben der Krümmungstheorie schätzenswerte Dienste geleistet.

Die Anfänge einer eigentlichen Funktionentheorie, vor allem die der elliptischen und *Abel'schen* Funktionen, führen auf *Fagnano*, *Maclaurin*, *d'Alembert* und *Landen* zurück. Es wurden Integrale algebraischer Irrationalitäten behandelt, namentlich solche von Quadratwurzeln aus Polynomen dritten

und vierten Grads; aber keine dieser Arbeiten lässt ahnen, dass man es hier mit den Anfängen einer die gesamte Algebra beherrschenden Disciplin zu thun hat [60]). Bestimmtere Gestaltung nehmen die sich entwickelnden Ideen unter den Händen *Euler's* und *Legendre's* an. Nachdem lange Zeit die Kreisfunktionen (*sin* x, *cos* x, . . .), ferner der Logarithmus, insbesondere für analytische Zwecke der hyperbolische Logarithmus mit der Basis e und als darin eingeschlossen die Exponentialfunktion e^x die einzigen bekannten transcendenten Funktionen gewesen waren, suchte man einerseits besondere transcendente Funktionen gründlich zu studieren — dies geschah durch *Legendre*, *Jacobi* und *Abel*; — andererseits die allgemeine Theorie der Funktionen einer imaginären Variabeln auszubilden, und auf diesem Gebiet erzielten *Gauss*, *Cauchy* *Dirichlet*, *Riemann*, *Liouville*, *Fuchs*, *Weierstrass* besondere Erfolge.

Die ersten Anzeichen einer Beschäftigung mit den elliptischen Funktionen knüpfen sich an die Bestimmung des Lemniskatenbogens, wie sie namentlich in der Mitte des 18. Jahrhunderts versucht wurde. Dabei machte *Fagnano* die Entdeckung, dass zwischen den Grenzen zweier den Kurvenbogen ausdrückenden Integrale, deren eines den doppelten Wert des andern hat, eine algebraische Beziehung einfacher Natur stattfindet. Es konnte dadurch der Lemniskatenbogen, obwohl eine Transcendente höherer Art, wie ein Kreisbogen durch geometrische Konstruktion verdoppelt oder halbiert werden [26]). Die Erklärung dieser merkwürdigen Erscheinung gab *Euler*. Er stellte ein allgemeineres Integral auf als Fagnano (das sogenannte elliptische Integral erster Gattung), und zeigte, dass zwei solche Integrale in ein drittes derselben Art vereinigt werden können, so dass zwischen den Grenzen dieser Integrale eine einfache algebraische Beziehung stattfindet, ähnlich wie der Sinus der Summe zweier Bögen aus den gleichnamigen Funktionen der einzelnen Bögen al-

gebraisch zusammengesetzt werden kann (Additionstheorem). Nur hängt das elliptische Integral nicht bloss von der Grenze, sondern noch von einer andern zur Funktion gehörigen Grösse, dem Modul ab. Während *Euler* nur Integrale mit gleichem Modul in Beziehung setzte, betrachteten *Landen* und *Lagrange* solche mit verschiedenen Moduln, indem sie zeigten, dass es möglich ist, durch eine einfache algebraische Substitution ein elliptisches Integral in ein anderes derselben Gattung zu verwandeln. Immerhin aber ist die Aufstellung des Additionstheorems ein mindestens ebenso hohes Verdienst *Euler's* wie seine Umgestaltung der Theorie der Kreisfunktionen durch die Einführung der imaginären Exponentialgrössen.

Die Entstehung[18a]) der eigentlichen Theorie der elliptischen Funktionen und der Thetafunktionen fällt zwischen 1811 und 1829. Von *Legendre* rühren zwei systematische Werke her, die »Exercices de calcul intégral«, 1811—1816, und die *Jacobi* und *Abel* nicht bekannte »Théorie des fonctions elliptiques«, 1825—1828. *Jacobi* veröffentlichte 1829 die »Fundamenta nova theoriae Functionum Ellipticarum«, deren Resultate zum Teil gleichzeitig von *Abel* gefunden worden waren. *Legendre* hatte erkannt, dass es sich bei derartigen Untersuchungen um einen neuen Zweig der Analysis handle und er setzte Jahrzehnte ernster Arbeit daran, ihn zur Entfaltung zu bringen. Ausgehend von dem Integral, das von einer Quadratwurzel vierten Grads in x abhängt, bemerkte *Legendre*, dass solche Integrale sich auf kanonische Formen zurückführen lassen. Für das Radikal wurde

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

gesetzt, und die drei wesentlich verschiedenen Gattungen der elliptischen Integrale waren $F(\varphi)$, $E(\varphi)$ und $\pi(\varphi)$; sie hängen ab von der Amplitude φ und dem Modul k, das letzte ausserdem noch von einem Parameter n.

Trotz der schönen Untersuchungen *Legendre's* über elliptische Integrale bot ihre Theorie doch noch mehrere rätselhafte Erscheinungen dar. Man hatte bemerkt, dass der Grad der die Teilung des elliptischen Integrals bedingenden Gleichung nicht der Anzahl der Teile wie in der Kreisteilung, sondern dem Quadrat derselben gleich ist. Die Lösung dieser und ähnlicher Fragen blieb *Jacobi* und *Abel* vorbehalten. Von den vielen fruchtbringenden Ideen dieser zwei hervorragenden Mathematiker sind es namentlich zwei, welche, beiden angehörend, in besonderer Weise die berührte Theorie gefördert haben.

Erstlich bemerkten *Abel* und *Jacobi* unabhängig von einander, dass es nicht zweckmässig sei, das elliptische Integral erster Gattung als Funktion seiner Grenze zu untersuchen, wie es seitdem geschehen war, sondern dass man die Betrachtungsweise umkehren müsse, und die Grenze als Funktion zweier von ihr abhängenden Grössen einzuführen habe. Anders ausgedrückt: *Abel* und *Jacobi* führten statt der inversen die direkten Funktionen ein. *Abel* nannte sie φ, f, F, und *Jacobi* *sin am*, *cos am*, Δ *am*, oder wie man auch wohl schreibt *sn*, *cn*, *dn*.

Ein zweiter erfinderischer Gedanke, der sowohl *Jacobi* als *Abel* angehört, ist die Einführung des Imaginären in diese Theorie. Wie *Jacobi* selbst versicherte, war es gerade diese Neuerung, welche die Lösung der Rätsel einer früheren Theorie ermöglichte. Es stellte sich heraus, dass die neuen Funktionen an der Natur der trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktionen Teil haben. Während die einen nur für reelle, die andern nur für imaginäre Werte des Arguments periodisch sind, haben die elliptischen Funktionen zwei Perioden. Es darf wohl bemerkt werden, dass, wie allerdings erst durch *Abel's* Arbeiten verständlich geworden ist, schon *Gauss* zu Anfang des 19. Jahrhunderts das Prinzip der doppelten Periode erkannt hat.

Von diesen zwei Fundamentalideen ausgehend, hatten *Jacobi* und *Abel*, jeder in seiner Art, weitere wichtige Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen geliefert. *Legendre* hatte eine Transformation eines elliptischen Integrals in ein anderes von derselben Form angegeben; eine zweite von ihm aufgefundene Transformation kannte *Jacobi* noch nicht, als dieser nach Ueberwindung bedeutender Schwierigkeiten zu dem wichtigen Resultat kam, dass sich in der Theorie solcher Funktionen eine Multiplikation aus zwei Transformationen zusammensetzen lasse.

Abel hatte sich den Aufgaben zugewendet, welche die Teilung und Multiplikation der elliptischen Integrale betreffen. Das eingehende Studium der doppelten Periodicität führte ihn zu der Entdeckung, dass die allgemeine Teilung des elliptischen Integrals mit beliebiger Grenze immer algebraisch möglich ist, sobald die Teilung der vollständigen Integrale als geschehen vorausgesetzt wird. Die Lösung des Problems wurde von *Abel* auf die Lemniskate angewendet, und dabei stellte sich heraus, dass die Teilung der ganzen Lemniskate der Kreisteilung völlig analog ist, und in denselben Fällen wie letztere algebraisch geleistet werden kann.

Eine andere wichtige Entdeckung *Abel's* kam dadurch zustande, dass er in den aus Funktionen mit einfachem Argument abgeleiteten Formeln für elliptische Funktionen eines vielfachen Arguments den Multiplikator unendlich werden liess. Dadurch entstanden die höchst merkwürdigen Ausdrücke, welche elliptische Funktionen durch unendliche Reihen oder Quotienten unendlicher Produkte darstellen.

Bei seinen Untersuchungen über die Transformation hatte *Jacobi* angenommen, dass die ursprüngliche Veränderliche durch die neue rational ausdrückbar sei. *Abel* trat auch in dieses Gebiet ein, unter der allgemeineren Annahme, dass zwischen diesen beiden Grössen eine algebraische Gleichung stattfinde, und das Ergebnis seiner Arbeit war, dass diese

allgemeinere Aufgabe mit Hilfe des von *Jacobi* vollständig behandelten besondern Problems gelöst werden könne.

Aber auch einzelne *Abel'sche* Untersuchungen erfuhren Förderungen durch *Jacobi's* Arbeiten. *Abel* hatte die Theorie der allgemeinen Teilung gegeben, aber die wirkliche Durchführung erforderte die Aufstellung gewisser symmetrischer Wurzelfunktionen, welche nur im besonderen Fall geleistet werden konnte. *Jacobi* gab die Lösung derselben Aufgabe so, dass die Bildung der erforderlichen Wurzelfunktionen ohne weiteres, und zwar einfacher als bei *Abel*, geschehen konnte. Als *Jacobi* dieses Ziel erreicht hatte, stand er schon allein auf dem weiten Feld des neuen Wissenszweigs, denn *Abel* war kurze Zeit vorher im Alter von nur 27 Jahren ins Grab gesenkt worden.

Die späteren Leistungen *Jacobi's* gipfeln in der Einführung der Thetafunktion. Schon *Abel* hatte die elliptischen Funktionen als Quotienten unendlicher Produkte dargestellt. Diese Produkte konnte *Jacobi* als spezielle Fälle einer einzigen Transcendenten darstellen, welche allerdings schon früher französischen Mathematikern bei physikalischen Untersuchungen aufgestossen, aber von ihnen vernachlässigt worden war. *Jacobi* erforschte ihre analytische Natur, brachte sie in Zusammenhang mit den Integralen zweiter und dritter Gattung und bemerkte insbesondere, dass die Integrale dritter Gattung, obwohl von drei Elementen abhängig, durch die nur zwei Elemente enthaltende neue Transcendente dargestellt werden können. Die Durchführung dieser Berechnung verlieh der ganzen Theorie einen hohen Grad von Uebersichtlichkeit und Klarheit; es konnten nun die elliptischen Funktionen *sn*, *cn*, *dn* als gleichnamige Quotienten der *Jacobi'schen* neuen Transcendenten Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 dargestellt werden.

Was *Abel* in der Theorie der elliptischen Funktionen geleistet hat, ist eine hervorragende, jedoch nicht seine grösste Leistung. Die glänzendsten Erfolge erzielte er in der Theorie

der nach ihm benannten *Abel'schen* Funktionen, deren erste Entwicklung in die Jahre 1826—1832 fällt. Das »*Abel'sche* Theorem« ist von seinem Entdecker in verschiedenen Formen dargestellt worden; den allgemeinsten Ausdruck enthält der nach des Verfassers Tod von der französischen Akademie preisgekrönte Aufsatz: »Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes« (1826). Seiner Form nach ist es ein Problem der Integralrechnung; die Integrale hängen ab von einer irrationalen Funktion y, welche mit x durch eine algebraische Gleichung $F(x,y) = 0$ verbunden ist. *Abel's* Fundamentalsatz sagt aus, dass eine Summe solcher Integrale sich durch eine bestimmte Anzahl p von ähnlichen Integralen ausdrücken lässt, wo p nur von den Eigenschaften der Gleichung $F(x,y) = 0$ abhängt. (Dieses p ist das Geschlecht der Kurve $F(x, y) = 0$; der Begriff des Geschlechts stammt aber erst aus dem Jahr 1857). Für den Fall, dass

$$y = \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E},$$

ist, führt das *Abel'sche* Theorem auf *Legendre's* Satz über die Summe zweier elliptischen Integrale. Hier ist $p = 1$. Wird

$$y = \sqrt{Ax^6 + Bx^5 + \ldots + P},$$

wo auch $A = 0$ sein kann, so ist $p = 2$, und so fort. Für $p = 3$ oder > 3 sind die hyperelliptischen Integrale nur besondere Fälle der *Abel'schen* Integrale gleicher Klasse.

Nach dem Tode *Abel's* führte *Jacobi* diese Betrachtungen in den »Considerationes generales de transcendentibus Abelianis« (1832) weiter und zeigte für hyperelliptische Integrale beliebiger Klasse, dass die direkten Funktionen, auf welche *Abel's* Satz sich bezieht, nicht Funktionen e i n e r Veränderlichen sind, wie die elliptischen Funktionen *sn*, *cn*, *dn*, sondern Funktionen von p Variabeln. — Einzelabhandlungen von

wesentlicher Bedeutung für den Fall $p = 2$ haben *Rosenhain* (1846) und *Goepel* (1847) zu Verfassern.

Bedeutungsvoll für die Entwicklung der ganzen Funktionentheorie sind zwei auf *Gauss* und *Cauchy* fussende Arbeiten *Riemann's* geworden. *Cauchy* hatte durch strengere Methoden und die Einführung der imaginären Variabeln »den Grund zu einer wesentlichen Verbesserung und Umgestaltung der gesamten Analysis gelegt«[63]). *Riemann* baute auf diesem Fundamente weiter und schrieb die »Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse« im Jahr 1851, und die »Theorie der *Abel'schen* Funktionen«, welche sechs Jahre später erschien. Zur Behandlung der *Abel'schen* Funktionen benützt *Riemann* vielfache Thetafunktionen, deren Theorie auf die allgemeinen Principien der Lehre von den Funktionen einer komplexen Variabeln gegründet ist. Er geht aus von Integralen algebraischer Funktionen allgemeinster Form und betrachtet deren inverse Funktionen, d. h. die *Abel'schen* Funktionen von p Veränderlichen. Dann wird eine Thetafunktion von p Variabeln definiert als Summe einer p-fach unendlichen Exponentialreihe, deren allgemeines Glied ausser von den p Variabeln von $3p - 3$ wesentlichen Moduln abhängt. So lässt sich zeigen, dass die *Abel'schen* Funktionen einen algebraischen Zusammenhang mit Thetafunktionen geeigneter Argumente haben.

Auf Grund der *Gauss'schen* und *Abel'schen* Arbeiten sowie der *Cauchy'schen* Entwicklungen über Integrationen in der imaginären Ebene hat sich eine strengere Richtung ausgebildet, welcher *Bolzano*, *Weierstrass*, *G. Cantor*, *Heine*, *Dedekind*, *P. Dubois-Reymond*, *Scheefer*, *Pringsheim*, *Hölder*, *Pincherle* und andere angehören. Diese strengere Richtung hat ihre Aufgabe namentlich darin gefunden, die

Grundlagen der Arithmetik insbesondere durch eine neue Einführung der irrationalen Grössen, die der Funktionentheorie durch Betrachtungen über Stetigkeit und Unstetigkeit, ebenso die Fundamente der Reihenlehre durch Untersuchungen über Konvergenz und Divergenz zu einwurfsfreien Theorien aufzubauen, sowie der Differentialrechnung durch Aufstellung von Mittelwertsätzen grössere Schärfe zu verleihen.

Zur Theorie der Thetafunktionen lieferten nach *Riemann* besonders *Weierstrass*, *Weber*, *Nöther*, *W. Stahl*, *Frobenius* und andere Beiträge.

Nach *Riemann* hat sich von der Theorie der *Abel'schen* Funktionen eine Theorie der algebraischen Funktionen und Punktgruppen auf algebraischen Kurven abgelöst, welche durch Untersuchungen von *Brill*, *Nöther* und *Lindemann* auf dem Restsatz und dem *Riemann-Roch'schen* Satz errichtet wurde, während neuerdings *Weber* und *Dedekind* an die im ersten Anhang zu *Dirichlet* geschaffene Theorie der Idealzahlen anschlossen.

Die überaus reiche Entwicklung der allgemeinen Funktionentheorie in der jüngsten Vergangenheit hat ihre Früchte auf den verschiedensten Gebieten mathematischen Wissens gezeitigt und lässt unzweifelhaft erkennen, dass sie ein sicheres Fundament für die Arbeit der Zukunft geschaffen hat.

IV. Geometrie.

A. Ueberblick.

Die ältesten Spuren der Geometrie finden sich bei den Aegyptern und Babyloniern. In dieser ersten Periode ist geometrisches Wissen fast ausschliesslich praktischen Zwecken dienstbar. Aus den Kreisen ägyptischer und babylonischer Priester und Weisen wurde die Geometrie auf griechischen Boden verpflanzt. Hier spielt die zweite Periode, eine klassische Zeit philosophischer Auffassung von geometrischen Vorstellungen als Träger einer allgemeinen Grössenlehre, geknüpft an die Namen eines *Pythagoras*, *Eratosthenes*, *Euklid*, *Apollonius* und *Archimedes*. Die zwei letzteren sind es namentlich, deren Arbeiten nach Richtungen weisen, welche erst die Neuzeit vollkommen scharf hat erkennen lassen. *Apollonius* gibt in seinen Kegelschnitten das erste folgenreiche Beispiel einer Geometrie der Lage, während *Archimedes* sich meist auf dem Boden der Geometrie des Masses bewegt.

Kurz war die Glanzperiode griechischer Geometrie, und doch dauerte es Jahrhunderte lang, bis die geistige Kraft der grossen Alexandriner sich in ihren Nachfolgern ins Unbedeutende verloren hatte. Dann aber kamen mehr als tausend Jahre einer ziemlich trostlosen Zeit, die sich im besten Falle darauf beschränkte, bei den Griechen geometrisches Wissen zu entlehnen, soweit dasselbe verstanden werden konnte. Die Geschichte könnte über diese vielen Jahrhunderte mit Stillschweigen hinweggehen, wenn sie nicht die Pflicht hätte, den düstern und unergiebigen Zeiten in ihrem Zusammenhang mit Vergangenheit und Zukunft Aufmerksamkeit zu schenken. Zunächst sind es in dieser dritten Periode die Römer, Inder und Chinesen, welche griechische Geometrie in ihrer Weise verwerten; dann die

Araber als geschickte Vermittler zwischen der altklassischen und einer neuen Zeit.

Die vierte Periode umfasst die beginnende Entwicklung der Geometrie bei den westlichen Völkern. Durch arabische Schriftsteller gelangten die Schätze einer längst verflossenen Zeit in die Mauern von Klöstern und unter die Hände von Lehrern an neugegründeten Schulen und Universitäten, ohne jedoch sofort einen Gegenstand des allgemeinen Unterrichts zu bilden. Die hervorragendsten Geister dieser Periode sind *Viète* und *Keppler*; sie weisen in ihrer Betrachtungsart schon auf die fünfte Periode hin, die mit *Descartes* ihren Anfang nimmt. Nun werden die kräftigen Mittel der Analysis in die Geometrie eingeführt: es entsteht die analytische Geometrie. Der Anwendung ihrer bestechenden Methoden widmeten sich fast ausschliesslich die Geometer des 17. und 18. Jahrhunderts, bis in der sogenannten neuen oder projektiven Geometrie und der Geometrie der krummen Flächen Disciplinen entstanden, die ebenso wie die analytische Geometrie über die Geometrie der Alten weit hinausragen, insbesondere durch die Wege, welche zu fast unbegrenzter Verallgemeinerung erkannter Wahrheiten dienen.

B. Erste Periode.

Aegypter und Babylonier.

In demselben Buch des *Ahmes*, welches über das elementare Rechnen der Aegypter Aufschluss gegeben hat, finden sich auch geometrische Abschnitte, Flächenberechnungen einfachster Art mit beigefügten Figuren. Die Begrenzung dieser Zeichnungen ist entweder gradlinig oder kreisförmig; es finden sich gleichschenklige Dreiecke, Rechtecke, gleichschenklige Trapeze und Kreise [16]). Die Fläche des Rechtecks ist richtig bestimmt; als Masszahl für die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks mit der Grundlinie a und dem Schenkel b findet

sich aber $\frac{1}{2}ab$, und fürs gleichschenklige Trapez mit den Parallelseiten a', a'' und der Nichtparallelen b ist der Inhalt als $\frac{1}{2}(a' + a'') . b$ angegeben. Diese Näherungsformeln werden durchgehends benützt und gelten offenbar für vollkommen richtig. Die Ausmessung des Kreises erfolgt durch den auffallend genauen Wert $\pi = (16:9)^2 = 3{,}1605$.

An geometrischen Konstruktionsaufgaben ragt eine durch ihre praktische Bedeutung hervor; es ist die Forderung, einen rechten Winkel abzustecken. Die Lösung dieser bei Anlegung von Tempeln und Palästen so wichtigen Aufgabe gehörte zum Beruf der Seilspanner oder Harpedonapten, und diese benützten dazu ein Seil, dessen Länge durch Knoten so in drei Teile zerlegt war, dass diese Strecken (vielleicht den Zahlen 3, 4, 5 entsprechend) ein pythagoräisches Dreieck bildeten[16]).

Bei den Babyloniern führte figürliche Darstellung durch religiöse Deutung zu einer förmlichen Vorbedeutungsgeometrie, welche Dreiecke, Vierecke, rechte Winkel, Kreise mit dem einbeschriebenen regulären Sechseck und der Teilung des Umfangs in 360°, sowie einen Wert $\pi = 3$ kannte.

Stereometrische Berechnungen, d. h. Bestimmungen des Inhalts von Fruchtspeichern, gibt *Ahmes*; jedoch ist aus seinen Angaben nichts genaueres zu erfahren, da über die Formen der berechneten Rauminhalte keine Angaben gemacht sind.

Was projektivische Darstellungen betrifft, so lassen ägyptische Wandskulpturen keine Spur von perspektivischen Kenntnissen nachweisen. Es wird z. B. ein quadratischer Teich im Grundriss dargestellt; die am Ufer stehenden Bäume und wasserschöpfenden Männer aber sind im Aufriss, gleichsam nach aussen umgelegt, dem Bilde eingefügt[121]).

C. Zweite Periode.

Die Griechen.

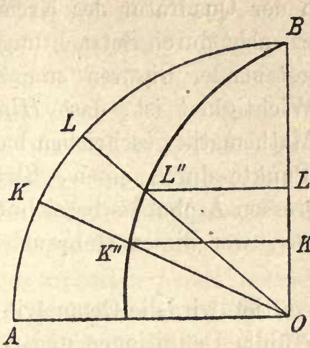
Bei einem Ueberblick über die griechische Geometrie will es da und dort scheinen, als ob Untersuchungen, die an bekannte Sätze in ganz einfacher Weise anschliessen, den Griechen nicht bekannt gewesen wären, oder als ob sie nicht genügende Begründung erfahren hätten, wenn sie sich scheinbar zusammenhangslos zwischen anderen Dingen eingeschaltet finden. Der eine Grund für diese Erscheinung ist ohne Zweifel darin zu suchen, dass eine Reihe bedeutender Schriften alter Geometer verloren gegangen ist. Ein anderer, nicht minder wichtiger Erklärungsgrund dürfte der sein, dass vieles bloss durch mündliche Ueberlieferung weiter gegeben wurde; und letztere erfolgte jedenfalls nicht in der fast starren und abstossenden Art, in welcher die meisten Beweise der Griechen abgefasst wurden, um die aufgestellten Wahrheiten unanfechtbar zu machen.

Bei *Thales* führen die Spuren der Geometrie auf Aegypten zurück, ohne dass man erwarten darf, alles zu finden, was den Aegyptern bekannt war. *Thales* nennt die Sätze über Scheitelwinkel, über die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, über die Bestimmung eines Dreiecks durch eine Seite und zwei anliegende Winkel und über den Winkel im Halbkreis. Er verstand auch die Höhe von Gegenständen mit Hilfe ihres Schattens, der mit dem Objekt ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck bilden musste, zu bestimmen, so dass sich schon hier die Grundzüge der Aehnlichkeitslehre entdecken lassen. Die Sätze finden sich bei *Thales* entweder gar nicht oder wenigstens nicht in der später geforderten Strenge bewiesen.

Einen bedeutenden Fortschritt in dieser Richtung hat *Pythagoras* und seine Schule gemacht. Dem *Pythagoras* selbst ist

unstreitig der Satz über das rechtwinklige Dreieck zuzuschreiben, den er wohl am Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 erkannte, ohne ihn strenge zu beweisen. *Euklid* hat den ersten scharfen Beweis dieses Satzes erbracht. Was von sonstigen Dingen dem *Pythagoras* persönlich, was seinen Schülern beizulegen ist, kann nur schwer entschieden werden. Die Pythagoräer bewiesen, dass die Winkelsumme im ebenen Dreieck $= 2R$ ist. Sie kannten den goldenen Schnitt und die regulären Figuren, soweit diese zur Begrenzung der fünf regelmässigen Körper dienten. Auch reguläre Sternpolygone waren bekannt, von diesen wenigstens das Sternfünfeck. Bei den pythagoräischen Flächenanlegungen spielte der Gnomon eine grosse Rolle. Dieses Wort bedeutete ursprünglich den vertikalen Stab, der durch seinen Schatten die Stunden anzeigte, dann auch den mechanisch hergestellten rechten Winkel. Bei den Pythagoräern ist der Gnomon die Restfigur, welche von einem Quadrat übrig bleibt, nachdem eine Ecke quadratisch ausgeschnitten worden ist. Später, bei *Euklid*, ist der Gnomon auch ein ähnlich ausgeschnittenes Parallelogramm (s. S. 51). Die Senkrechte zu einer Geraden heisst pythagoräisch »eine nach dem Gnomon gerichtete Linie« [16]).

Auch ausserhalb der pythagoräischen Schule waren geometrische Kenntnisse verbreitet. *Anaxagoras* soll als der erste ein Quadrat zu bestimmen versucht haben, dessen Fläche gleich derjenigen eines gegebenen Kreises ist. Es ist anzunehmen, dass er wie die meisten seiner Nachfolger an die Möglichkeit der Lösung dieser Aufgabe glaubte. *Oinopides* lehrte, wie man von einem Punkt ein Lot auf eine Gerade fällt, und wie man an eine Gerade in einem gegebenen Punkt einen gegebenen Winkel anlegt. *Hippias von Elis* sucht gleichfalls die Quadratur des Kreises, ferner die Dreiteilung des Winkels und konstruiert zu diesem Zweck die Quadratrix.



Diese krumme Linie entsteht wie folgt: Auf einem durch die zu einander senkrechten Durchmesser OA und OB ausgeschnittenen Kreisquadranten liegen die Punkte $A, \ldots K, L, \ldots B$. Der Halbmesser $r = OA$ dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um O aus der Lage OA in die Lage OB. Gleichzeitig geht eine stets zu OA parallele Gerade g mit gleichförmiger Geschwindigkeit aus der Lage OA über in die Lage der Kreistangente in B. Ist K' der Schnitt von g mit OB für den Zeitpunkt, in welchem der bewegliche Halbmesser nach OK fällt, so trifft die durch K' mit OA gezogene Parallele den Halbmesser OK in einem Punkt K'', und dies ist ein Punkt der Quadratrix. Ist P der Schnittpunkt der Quadratrix mit OA, so folgt teils unmittelbar, teils durch einfache Betrachtungen, dass

$$\frac{\text{Bogen } AK}{\text{Bogen } AL} = \frac{OK'}{OL'},$$

eine Beziehung, welche die Aufgabe der Winkelteilung löst, und

$$OP = \frac{2r}{\pi} \quad \text{oder} \quad \frac{OP}{OA} = \frac{OA}{\text{Bogen } AB},$$

woraus ersichtlich ist, dass die Quadratur des Kreises von dem Verhältnis abhängt, in welchem der Halbmesser OA durch den Punkt P der Quadratrix geteilt wird; wäre dies Verhältnis elementargeometrisch konstruierbar, so hätte man damit die Quadratur des Kreises gefunden. — Es scheint, dass die Quadratrix zunächst für die Dreiteilung des Winkels erfunden, und dass erst später ihre Beziehung zur Quadratur des Kreises entdeckt worden ist [77]), worauf namentlich *Dinostratus* hinweist.

Das Theorem der Quadratur des Kreises tritt auch bei *Hippokrates* auf; er sucht durch Betrachtung halbmondartiger, aus Kreisbögen bestehender Figuren zum Ziel zu gelangen. Von besonderer Wichtigkeit ist, dass *Hippokrates* ein Elementarbuch der Mathematik geschrieben hat (das erste dieser Art), in dem er Punkte durch einen, Strecken durch zwei Buchstaben des grossen Alphabets bezeichnet, ohne dass man zu sagen vermöchte, wer diesen Gebrauch zuerst eingeführt hat.

Philosophisch vertieft wird die Geometrie durch *Platon*, welcher das Bedürfnis fühlt, Definitionen und Axiome aufzustellen und die Arbeit des Forschers durch Einführung der analytischen Methode zu erleichtern.

Eine systematische Darstellung der Ergebnisse aller älteren Forschungen auf dem Gebiet der elementaren Geometrie, vermehrt um die Früchte eigener ergiebiger Arbeit, gibt *Euklid* in den dreizehn Büchern der »Elemente«, die allerdings nicht bloss über ebene, sondern auch über räumliche Gebilde und algebraische Untersuchungen berichten. »Was je zum Preise der Mathematik gesagt wurde, was man ihrer Darstellung an Kraft, Durchsichtigkeit und Schärfe nachrühmt, gilt alles in erster Linie von diesem Werk des grossen Alexandriners. Definitionen, Axiome und Schlüsse fügen sich Ring an Ring wie zu einer Kette, fest und undehnbar, von bindender Gewalt, aber auch kalt und hart, einen produktiven Sinn zurückstossend und selbständiger Regung keinen Raum gebend. Es gehört ein gereifter Verstand dazu, die klassischen Schönheiten dieses grössten Denkmals griechischen Scharfsinns zu würdigen. Der Tummelplatz für den unternehmungslustigen Sinn der Jugend ist es nicht; sie zu fesseln ist ein Terrain geschickter, wo sich hoffen lässt, noch neues, unerwartetes zu entdecken« [13]).

Das erste Buch der »Elemente« verbreitet sich über die Lehre vom Dreieck und Viereck, das zweite Buch über die

Anwendung des pythagoräischen Satzes zu einer grossen Reihe von Konstruktionen, welche eigentlich arithmetischer Natur sind. Das dritte Buch bringt die Kreislehre, das vierte ein- und umbeschriebene Vielecke am Kreis. Die Proportionen, erläutert mit Hilfe von Strecken, füllen das fünfte Buch und finden ihre Verwendung im sechsten Buch zum Beweis der Sätze über die Aehnlichkeit der Figuren. Das siebente, achte, neunte und zehnte Buch sind vorwiegend zahlentheoretischer Natur; diese Bücher enthalten nemlich das Messen und Teilen der Zahlen, den Algorithmus zur Bestimmung des kleinsten Gemeinvielfachen und grössten gemeinschaftlichen Masses, ferner Primzahlen, die geometrische Reihe, inkommensurable (irrationale) Grössen. Hierauf folgt die Stereometrie: im elften Buch die Gerade, die Ebene, das Prisma; im zwölften die Berechnung von Pyramide, Prisma, Kegel, Cylinder, Kugel; im dreizehnten reguläre Vielecke nebst den aus ihnen zu bildenden regulären Körpern, deren Anzahl *Euklid* bestimmt auf fünf angibt. — Ohne das Verdienst *Euklid's* um die Abfassung dieses unvergänglichen Werkes im geringsten zu schmälern, darf angenommen werden, dass einzelne Teile aus einer gründlichen Vorarbeit anderer hervorgewachsen sind. Dies gilt mit ziemlicher Sicherheit vom fünften Buch, dessen erster Verfasser *Eudoxus* sein soll.

Nicht durch ein grosses Sammelwerk wie *Euklid*, wohl aber durch eine Reihe wertvoller Einzelabhandlungen hat *Archimedes* einen berechtigten Anspruch auf nähere Schilderung seiner geometrischen Leistungen. Bei den Untersuchungen über die Kugel und den Cylinder nimmt er an, dass die Gerade die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten sei. Aus dem Arabischen kennt man eine kleine geometrische Schrift des *Archimedes*, bestehend aus fünfzehn sogenannten »Wahlsätzen«, von denen einige für die Vergleichung geradlinig und kreisförmig begrenzter Figuren, für die Dreiteilung

des Winkels und die Aufstellung von Doppelverhältnissen Bedeutung haben. Von besonderer Wichtigkeit ist die archimedische Kreismessung, in welcher für π die Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ angegeben werden. Diese wie viele andere Resultate leitet *Archimedes* durch die Exhaustionsmethode ab, die bei den Alten in der Regel an Stelle der modernen Integration trat[19]). Die gesuchte Grösse, z. B. die von einer Kurve umschlossene Fläche, konnte als Grenzwert für den Inhalt ein- und umbeschriebener Polygone, deren Seitenzahl durch Halbierung stets vermehrt wurde, betrachtet werden, und man bewies, dass der Unterschied zweier benachbarten Polygone bei unbegrenzter Fortsetzung dieses Verfahrens kleiner werden muss als eine beliebig kleine gegebene Grösse; dieser Unterschied wurde also gleichsam erschöpft und so das Resultat durch Exhaustion gewonnen.

Das Gebiet elementargeometrischer Konstruktionen erfuhr durch *Apollonius* eine Bereicherung in der Lösung der Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt, und durch die systematische Durchführung des Diorismus (der Abgrenzung oder Umgrenzung) auch bei schwierigeren Aufgaben in seinen Kegelschnitten, aus welchen zu ersehen ist, dass *Apollonius* nicht bloss die Bedingungen für die Möglichkeit der Lösung überhaupt angibt, sondern insbesondere die Grenzen von Lösungen bestimmt wissen will.

Von *Zenodorus* haben sich mehrere Sätze über Figuren gleichen Umfangs erhalten; er spricht beispielsweise aus, dass der Kreis einen grösseren Inhalt hat als jedes reguläre Vieleck von gleichem Umfang, dass unter allen isoperimetrischen Polygonen gleicher Seitenzahl das reguläre den grössten Inhalt hat, und ähnliches. — *Hypsikles* hat als Neues die Einteilung des Kreisumfangs in 360°. — Von *Heron* stammt ein Buch über Geometrie (nach *Tannery* ein Kommentar zu *Euklid's* Elementen), welches sich in ausgedehnter Weise mit der Berechnung ebener Figuren befasst. Hier findet sich für

den Inhalt $\triangle$ des Dreiecks aus den Seiten a, b, c und für $2s = a + b + c$ die Formel

$$\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\;(s-b)\;(s-c)}$$

entwickelt. In der Kreisrechnung steht meist $\frac{22}{7}$ als Näherungswert für π; jedoch kommt auch in dem »Buch der Ausmessungen« $\pi = 3$ vor.

In der Periode nach Beginn der christlichen Zeitrechnung wird die Ausbeute immer geringer. Nur noch einzelnes ist nennenswert; so zunächst ein Satz von *Serenus* über Transversalen des Dreiecks, der seinem Sinn nach aussagt, dass ein harmonisches Strahlenbüschel von jeder beliebigen Geraden in einer harmonischen Punktreihe geschnitten wird. Im Almagest tritt der Satz vom Sehnenviereck auf, der gemeinhin als ptolemäischer Lehrsatz bekannt ist, und ein sexagesimal geschriebener Wert $\pi = 3\,.\,8\,.\,30$, d. h.

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60\,.\,60} = 3\,\frac{17}{120} = 3{,}14166\;\ldots.$$

In einer besonderen Abhandlung über Geometrie deutet *Ptolemäus* an, dass er die Parallelentheorie *Euklid's* nicht für unanfechtbar hält.

Zu den letzten Trägern griechischer Geometrie gehören *Sextus Julius Afrikanus*, der die Breite eines Flusses durch Anwendung ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke bestimmt, und *Pappus*. Des letzteren Name ist durch die »Sammlung« sehr bekannt geworden. Dieses Werk, ursprünglich aus acht Büchern bestehend, von denen das erste ganz und das zweite zum grössten Teil verloren gegangen ist, schildert den Inhalt der mathematischen Schriften, die zur Zeit des Verfassers in besonderem Ansehen standen, und versieht diese an einzelnen Stellen mit Zusätzen. Da sein Werk augenscheinlich mit grosser Gewissenhaftigkeit abgefasst wurde, so ist es für die alte

Zeit eine der zuverlässigsten Quellen mathematischer Geschichtsforschung geworden. Der geometrische Teil der »Sammlung« enthält unter anderem Abhandlungen über die drei verschiedenen Mittel zweier Strecken, über isoperimetrische Figuren, Kreisberührung und Aehnlichkeit bei Kreisen, insofern wenigstens bewiesen wird, dass alle Verbindungsgeraden der Endpunkte paralleler und gleich- oder entgegengesetzt gerichteter Halbmesser zweier Kreise sich je in einem festen Punkte der Zentrale schneiden.

Hervorragendes leisteten die Griechen nicht bloss auf dem Gebiet der elementaren Geometrie; sie sind auch die Schöpfer der Lehre von den Kegelschnitten. Und wie für jenes Gebiet der Name *Euklid's*, so ist für dieses der Name des *Apollonius von Pergae* zum wahren Streitruf geworden. Mit *Apollonius* beginnt allerdings die Lehre von den Kurven zweiter Ordnung nicht, so wenig wie mit *Euklid* die *Euklid'sche* Geometrie; aber was die »Elemente« für die Elementargeometrie bedeuten, das sind die »acht Bücher der Kegelschnitte« für die Linien zweiter Ordnung. — Nur die vier ersten Bücher der *Apollonischen* Kegelschnitte sind im griechischen Text erhalten; die drei weiteren wurden durch arabische Uebersetzungen bekannt; das achte Buch ist bis jetzt nicht aufgefunden und gilt als verloren, sein Inhalt jedoch wurde nach Angaben des *Pappus* von *Halley* wiederhergestellt. — Im ersten Buch ist von der Erzeugung der Kegelschnitte durch ebene Schnitte an Kreiskegeln, von konjugierten Durchmessern, von Achsen und Tangenten die Rede. Das zweite Buch handelt insbesondere von den Asymptoten; diese erhält *Apollonius* dadurch, dass er auf einer Tangente vom Berührungspunkt aus die halbe Länge des parallelen Durchmessers abträgt und den Endpunkt mit dem Mittelpunkt der Kurve verbindet. Das dritte Buch enthält Sätze über Brennpunkte und Sekanten, das vierte über den Schnitt von Kreisen mit Kegelschnitten und von solchen Linien unter

sich. Damit ist die elementare Theorie der Kegelschnitte bei *Apollonius* abgeschlossen. Die nun folgenden Bücher enthalten Einzeluntersuchungen als Anwendung der in den vier ersten Büchern entwickelten Methoden. So handelt das fünfte Buch von den kürzesten und längsten Linien, welche von einem Punkt nach dem Umfang eines Kegelschnitts gezogen werden können, also von den Normalen durch einen beliebigen Punkt in der Ebene der Kurve zweiter Ordnung; das sechste von gleichen und ähnlichen Kegelschnitten, das siebente in besonderer Weise von den Parallelogrammen, die aus konjugierten Durchmessern konstruiert werden können, und von dem Satz über die Summe der Quadrate konjugierter Durchmesser. Das achte Buch enthielt nach *Halley* eine Reihe von Aufgaben, die sich an Hilfssätze des siebenten Buchs aufs engste anschlossen.

Die erste Anregung zur Entwicklung der Lehre von den Kegelschnitten wird bis auf *Hippokrates* zurückgeleitet[124]); dieser führte das Theorem der Würfelverdopplung auf die Konstruktion von zwei mittleren Proportionen x und y zu zwei gegebenen Strecken a und b zurück:

$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ gibt $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, woraus folgt:

$$x^3 = a^2 b = \frac{b}{a} \cdot a^3 = m \cdot a^3.$$

Archytas und *Eudoxus* scheinen durch Konstruktion in der Ebene Kurven gefunden zu haben, welche den obigen Beziehungen genügten, aber sich von Kreisen und Geraden unterschieden. *Menächmus* suchte für die schon aus ebenen Konstruktionen bekannten neuen Kurven eine Darstellung durch Schnitte an Rotationskegeln und wurde in diesem Sinne der Entdecker der Kegelschnitte. Er benützte nur Schnitte senkrecht zu einer Erzeugenden eines geraden Kreiskegels, und es war die Parabel der »Schnitt am rechtwinkligen Kegel«

(dessen erzeugender Winkel = 45° ist), die Ellipse der »Schnitt am spitzwinkligen Kegel«, die Hyperbel der »Schnitt am stumpfwinkligen Kegel«. Diese Namen gebraucht auch *Archimedes* noch, obwohl er weiss, dass die drei Kurven sich an jedem Kreiskegel durch ebene Schnitte erzeugen lassen. Erst *Apollonius* führt die Namen »Ellipse«, »Parabel«, »Hyperbel« ein. — Schon *Menächmus* vielleicht, jedenfalls aber *Archimedes* bestimmte die Kegelschnitte durch eine lineare Gleichung zwischen Flächen, welche sich in der Form $y^2 = kxx_1$ darstellen lässt. Der halbe Parameter war bei *Archimedes* und wohl auch schon bei seinen Vorgängern »das Stück bis zur Axe«, d. h. das Stück der Kegelschnittsaxe vom Scheitel der Kurve bis zum Schnitt mit der Achse des Kegels. Die Benennung »Parameter« rührt von *Desargues* (1639) her[5a]).

Es ist nachgewiesen worden[124]), dass *Apollonius* die Kegelschnitte durch eine Gleichung von der Form $y^2 = px + \alpha x^2$ darstellte, x und y als Parallelcoordinaten betrachtet und jedes Glied als eine Fläche dargestellt. Daraus wurden andere Gleichungen ersten Grads zwischen Flächen abgeleitet und so analytisch-geometrische Gleichungen unter Benutzung eines Parallelcoordinatensystems erhalten, dessen Anfangspunkt durch geometrische Betrachtungen eine Verlegung gestattete, gleichzeitig verbunden mit einer Vertauschung der Axen, so dass hier schon einzelne Grundgedanken der fast 2000 Jahre jüngeren analytischen Geometrie sich offenbaren.

Das Studium der Kegelschnitte erfolgte stets nur so lange auf dem Kegel selbst, bis eine planimetrische Grundeigenschaft die Möglichkeit zuliess, die weitere Untersuchung in der Ebene vorzunehmen[124]). Auf diese Weise war bis *Archimedes* eine Reihe wichtiger Sätze bekannt geworden, so die Lehre von den konjugierten Durchmessern und die Beziehung der Kegelschnitte auf sie als Axen mit Hilfe von Gleichungen ersten Grads zwischen Flächen, so auch der sogenannte *Newton'sche* Potenzsatz, also der Satz, dass die Rechtecke aus den Abschnitten zweier durch einen beliebigen Punkt in vorgeschriebener Richtung gezogenen Sekanten eines

Kegelschnitts in konstantem Verhältnis stehen; ferner Sätze über die Erzeugung eines Kegelschnitts durch seine Tangenten oder als Ort zu vier Geraden, und ebenso der Satz über Pol und Polare. Aber diese Sätze wurden stets nur auf einen Hyperbelast angewendet. Es ist eines der wesentlichsten Verdienste des *Apollonius*, seine eigenen und die schon bekannten Sätze konsequent auf beide Hyperbeläste ausgedehnt zu haben. Seine ganze Betrachtungsweise rechtfertigt es, wenn man ihn den bedeutendsten Vertreter der griechischen Kegelschnittslehre nennt, umsomehr, als sich aus seinem Hauptwerk erkennen lässt, dass bei den Alten auch der Lehre von den projektivischen Punktreihen und Strahlenbüscheln durch verschiedene Sätze und Anwendungen wesentlich vorgearbeitet worden ist.

Mit *Apollonius* schliesst die Zeit neuer Entdeckungen im Bereich der Kegelschnittslehre ab. In späterer Zeit finden sich nur Anwendungen längst bekannter Theoreme auf nicht zu schwierige Aufgaben, wie ja die Lösung von Aufgaben schon in den ältesten Zeiten der griechischen Geometrie eine Rolle spielte und die Veranlassung zur Aufstellung nicht bloss der Kegelschnitte, sondern auch von Kurven höherer als der zweiten Ordnung wurde. Unter der Zahl der Aufgaben, die sich ihres klassischen Wertes wegen von Geschlecht zu Geschlecht vererbten und stets neue Anregung zu weiteren Forschungen gaben, ragen namentlich drei durch ihre Wichtigkeit hervor: die Würfelverdopplung oder allgemeiner die Multiplikation des Würfels, die Dreiteilung des Winkels und die Quadratur des Kreises. Das Auftreten gerade dieser drei Theoreme ist für die Entwicklung der ganzen Mathematik bedeutsam geworden. Das erste verlangt die Lösung einer Gleichung dritten Grads; das zweite führt (für gewisse Winkel wenigstens) auf ein wichtiges Gebiet der Zahlentheorie, nemlich auf die Kreisteilungsgleichungen, und erst *Gauss* (s. S. 123) hat den Beweis geliefert, dass eine

endliche Anzahl von Operationen mit Hilfe von Zirkel und Lineal ein reguläres n-Eck nur dann zu konstruieren gestatten, wenn $n - 1 = 2^p$ (p eine beliebige ganze Zahl) ist. Die dritte Aufgabe endlich reicht über das Gebiet der eigentlichen Algebra hinaus, denn *Lindemann**) hat im Jahr 1882 gezeigt, dass π nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Coëfficienten sein kann.

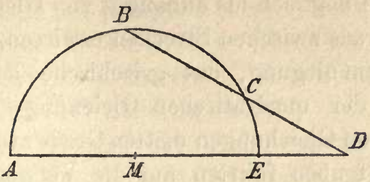
Die Multiplikation des Würfels, algebraisch gesprochen die Bestimmung von x aus der Gleichung

$$x^3 = \frac{b}{a} \,.\, a^3 = m \,.\, a^3,$$

heisst auch die Delische Aufgabe, weil *Platon* mit den Deliern über diese Aufgabe in Meinungsaustausch gestanden sein soll. Mit der Lösung dieser Aufgabe beschäftigten sich besonders *Platon*, *Archytas* und *Menächmus*; letzterer löste sie durch Kegelschnitte (Hyperbeln und Parabeln). *Apollonius* konstruierte zum gleichen Zweck einen besonderen mechanischen Apparat.

Unter den Lösungen über die Dreiteilung des Winkels ragt das Verfahren des *Archimedes* hervor. Es bietet ein Beispiel dar für sogenannnte Einschiebungen, deren sich die Griechen bedienten, wenn eine Aufgabe nicht durch Lineal und Zirkel lösbar war. Des *Archimedes'* Verfahren besteht in folgendem: Soll der Bogen AB des Kreises vom Mittelpunkt M in drei gleiche Teile geteilt werden, so zieht man den Durchmesser AE, und durch B eine Sekante, welche den Kreis in C und den Durchmesser AE in D derart schneidet, dass CD gleich dem Halbmesser r des Kreises wird. Es ist dann Bogen $CE = \frac{1}{3} AB$. Die Ausführung besteht nach den Regeln der Einschiebung darin, dass man auf einem Streifen eine Länge $= r$ abträgt und denselben durch B

*) Mathem. Annalen, XX, S. 213.



gehen lässt, während ein Endpunkt D der Strecke r auf den Durchmesser AE gleitet. Bei Bewegung des Streifens wird in einer gewissen Lage der andere Endpunkt von r auf den Umfang des Kreises fallen und damit ist der Punkt C bestimmt.

Dieselbe Aufgabe löst *Pappus* seinem eigenen Zeugnis gemäss nach dem Beispiel der Alten durch Kegelschnitte, wie denn überhaupt die Linien zweiter Ordnung in zum grössten Teil verlorenen Schriften des *Apollonius* eine ausgiebige Verwendung zur Lösung von Aufgaben finden. Es wurden dabei die Kegelschnitte häufig körperliche Oerter genannt, im Gegensatz zu den ebenen Oertern, nemlich zur Geraden und dem Kreis. Es gab aber auch darüber hinausgehend lineare Oerter, und das waren alle übrigen Kurven, von welchen eine ganze Anzahl untersucht wurde.

Diese Benennung der Oerter findet sich namentlich bei *Pappus*, der im siebenten Buch angibt [124]), dass eine Aufgabe eine ebene, körperliche oder lineare heisst, je nachdem zu ihrer Lösung ebene, körperliche oder lineare Oerter verwertet werden müssen. Es ist jedoch in hohem Grade wahrscheinlich, dass die Oerter ihre Namen von Aufgaben erhielten, dass also die Einteilung der Aufgaben in ebene, körperliche und lineare der Benennung der zugehörigen Oerter voranging. Zunächst ist anzunehmen, dass von »linearen Aufgaben und Oertern« erst gesprochen wurde, nachdem die Namen »ebene und körperliche Aufgaben und Oerter« sich eingebürgert hatten. Ebene Aufgaben waren solche, die bei der geome-

trischen Behandlung sich als abhängig von Gleichungen ersten oder zweiten Grads zwischen Strecken erwiesen, die also durch einfache Flächenanlegung, das griechische Ersatzmittel für die Auflösung der quadratischen Gleichung, gelöst werden konnten. Die von Gleichungen dritten Grads zwischen Strecken abhängigen Aufgaben führten auf die Verwendung von Gebilden mit drei Dimensionen, wie z. B. die Würfelverdopplung, und wurden als körperliche Aufgaben bezeichnet; die zu ihrer Lösung dienenden Oerter (die Kegelschnitte), waren körperliche Oerter. Erst in einer Zeit, wo die Bedeutung des »eben« und »körperlich« vergessen war, entstand der Name »lineare Aufgaben« für solche, deren Behandlung (durch »lineare Oerter«) auf Gleichungen führt, die nicht mehr vom ersten, zweiten oder dritten Grad sind, welche sich also nicht mehr als lineare Beziehungen zwischen Strecken, Flächen oder Rauminhalten darstellen lassen.

Von linearen Oertern verwendet *Hippias* die vielleicht von *Dinostratus* erfundene Quadratrix zur Dreiteilung des Winkels und zur Quadratur des Kreises (s. S. 152). *Eudoxus* kennt die Schnitte des Kreiswulstes, welche durch Ebenen parallel der Axe der Wulstfläche entstehen, insbesondere die Hippopede oder Achterkurve [72]). Besondere Berühmtheit erlangten die Spiralen des *Archimedes*, deren Betrachtung seinen schönen Untersuchungen über die Quadratur der Parabel würdig an die Seite tritt.

Schon *Konon* hatte die »Archimedische Spirale« durch die Bewegung eines Punktes erzeugt, der sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf dem Halbmesser OA eines Kreises k von O aus entfernt, während sich OA ebenfalls gleichförmig um O dreht. Aber erst *Archimedes* entdeckte einige der schönen Eigenschaften dieser Kurve; er fand, dass wenn nach einmaligem Umlauf die Spirale dem Kreis k vom Halbmesser OA in B begegnet (wo BO Tangente der Spirale in O ist), die von BO und der Spirale begrenzte Fläche ein

Drittel des Inhalts des Kreises k wird; ferner dass die an die Spirale im Punkt B konstruierte Tangente von einer auf OB in O errichteten Senkrechten eine Strecke gleich dem Umfang des Kreises k abschneidet [77]).

Die einzige nennenswerte Erfindung des *Nikomedes* ist die Konstruktion der Conchoide, welche er benützte, um das Problem der zwei mittleren Proportionalen, oder was dasselbe ist, der Multiplikation des Würfels zu lösen. Die Kurve ist der geometrische Ort des Punktes x auf g, wenn die durch einen festen Punkt P gehende bewegliche Gerade g eine feste Gerade h in Y so schneidet, dass XY eine konstante Länge behält. *Nikomedes* untersuchte auch die Eigenschaften dieser Kurve und verfertigte einen aus Linealen bestehenden Apparat zur mechanischen Erzeugung seiner krummen Linie.

Ebenfalls zur Multiplikation des Würfels diente die Cissoide des *Diokles*. Sie kann folgendermassen erzeugt werden: Durch den Endpunkt A des Halbmessers OA eines Kreises k geht die Sekante AC und trifft k in C, den zu OA senkrechten Halbmesser OB in D; X auf AC ist ein Punkt der Cissoide, wenn $DX = DC$ gemacht wird. — Von *Geminus* rührt der Nachweis her, dass ausser der Geraden und dem Kreis auch die von *Archytas* erdachte gemeine Schraubenlinie die Eigenschaft der Verschiebbarkeit in sich selbst besitzt.

Organisch verbunden mit der Geometrie der Ebene entwickelte sich auch die Geometrie des Raums, zunächst als elementare Stereometrie, und dann in den Sätzen über Flächen zweiter Ordnung. Die Kenntnis der fünf regulären Körper und der ihnen zugehörigen umbeschriebenen Kugel geht jedenfalls bis zu den Pythagoräern zurück. Nach den Aussagen des *Timäus von Locri* [16]) besteht das Feuer aus Tetraëdern, die Luft aus Oktaëdern, das Wasser aus Ikosaëdern, die Erde aus Würfeln, und das Pentagondodekaëder

bildet den Umriss des Weltalls. Ueber diese fünf kosmischen oder platonischen Körper soll *Theätet* zuerst ein zusammenhängendes Ganzes veröffentlicht haben. *Eudoxus* gibt an, dass eine Pyramide (oder ein Kegel) $\frac{1}{3}$ des Primas von gleicher Grundfläche und Höhe sei. Das elfte, zwölfte und dreizehnte Buch der Elemente *Euklid's* bieten die gewöhnliche Stereometrie in kurzer Zusammenfassung (s. S. 155). *Archimedes* führt dreizehn halbreguläre Körper ein, d. h. Körper, deren Begrenzungsflächen reguläre Vielecke von zwei oder drei verschiedenen Gattungen sind. Ausserdem vergleicht er Oberfläche und Inhalt der Kugel mit den entsprechenden Grössen des umbeschriebenen Cylinders und erhält dadurch Sätze, welche er hoch genug schätzt, um den Wunsch zu äussern, die Kugel mit dem Berührungscylinder auf seinem Grabdenkmal eingemeiselt zu erhalten. — Von späteren Mathematikern schreiben *Hypsikles* und *Heron* über Berechnungsaufgaben an regulären und nichtregulären Körpern. Auch *Pappus* berichtet über stereometrische Untersuchungen, von denen aber als neu nur die Berechnung des Kubikinhalts eines Umdrehungskörpers mittelst der Meridianfigur und des Wegs des Flächenschwerpunkts derselben hervorzuheben ist. Er kennt also einen Teil des Satzes, der später den Namen der Guldinischen Regel erhalten hat.

Von Flächen zweiter Ordnung kannten die Griechen die elementaren Umdrehungsflächen, also die Kugel, den senkrechten Kreiscylinder und Kreiskegel. *Euklid* spricht nur von Umdrehungskegeln, *Archimedes* dagegen von beliebigen Kreiskegeln. Ausserdem untersucht *Archimedes* noch »rechtwinklige Konoide« (Umdrehungsparaboloide), »stumpfwinklige Konoide« (einmantelige Rotationshyperboloide) und »längliche und breite Sphäroide« (Rotationsellipsoide um die grosse und kleine Achse). Er bestimmt die Art ebener Schnitte und den Kubikinhalt von Abschnitten solcher Drehflächen. Wahr-

scheinlich wusste *Archimedes* auch, dass diese Drehflächen den geometrischen Ort für einen Punkt bilden, dessen Entfernungen von einem festen Punkt und einer gegebenen Ebene ein konstantes Verhältnis haben. Nach *Proclus* [72]), der eine gewisse Bedeutung als Ausleger *Euklid's* besitzt, waren auch Wulstflächen bekannt, welche dadurch entstehen, dass ein Kreis vom Halbmesser r um eine in seiner Ebene liegende Axe so rotiert, dass sein Mittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser e beschreibt; und zwar wurden die Fälle $r \lesseqgtr e$ betrachtet.

Auch in Projektionsmethoden [121]) waren die Griechen nicht unerfahren. Schon *Anaxagoras* und *Demokrit* sollen die Gesetze des Fluchtpunktes und der Verjüngung wenigstens für die einfachsten Fälle gekannt haben. *Hipparch* bildet die Himmelskugel von einem Pol aus auf ihre Aequatorebene ab; er ist also der Erfinder der stereographischen Projektion, welche unter dem Namen des *Ptolemäus* bekannt geworden ist.

D. Dritte Periode.

Römer, Inder, Chinesen, Araber.

Bei keinem andern Volk des Altertums erreichte geometrisches Wissen eine so hohe Stufe wie bei den Griechen. Ihre Errungenschaften auf diesem Gebiet verpflanzten sich zum Teil auf fremden Boden, jedoch nicht so, dass dort (etwa mit Ausnahme der rechnerischen Seite), wesentlich neues entstanden wäre. Häufig wurde das von den Griechen Ererbte nicht einmal völlig verstanden und blieb deshalb in der Litteratur des fremden Volkes begraben, bis von *Descartes* an eine ganz neue Zeit mit mächtigeren Hilfsmitteln den alten Schätzen wieder nachforschte und sie gewinnbringend ausbeutete.

Den Römern geht selbständige Verarbeitung mathe-

matischer Wahrheiten fast gänzlich ab. Was sie von den Griechen erhielten, wurde einzig und allein praktischen Zwecken dienstbar gemacht. Zu diesem Ende übersetzte man einzelne Abschnitte aus *Euklid* und *Heron*. Man sammelte zur Erleichterung des Geschäfts der Feldmesser oder Agrimensoren wichtige geometrische Regeln in einem grösseren Werke, von dem sich Bruchstücke als Codex Arcerianus erhalten haben. Aus diesem Codex ist der Wert $\pi = 3\frac{1}{8}$ bekannt geworden, der, obwohl ungenauer als das Heronische $\pi = 3\frac{1}{7}$, doch im Duodezimalsystem eine bequemere Rechnung gestattete. — Ein besonderes Werk über Geometrie hat *Boëthius* hinterlassen, aber der Inhalt desselben ist so dürftig, dass anzunehmen ist, er habe eine ältere mangelhafte Bearbeitung griechischer Geometrie als Quelle benützt.

Obwohl auch die indische Geometrie in Abhängigkeit von der griechischen steht, hat sie doch infolge der Beeinflussung durch die arithmetische Denkweise der Inder ihre Eigentümlichkeiten. Die Çulvasûtras enthalten geometrische Partien. Diese lehren die bei den Aegyptern schon bekannte Seilspannung, d. h. sie verlangen die Absteckung rechter Winkel mit Hilfe eines Seils, das durch einen Knoten in die Abschnitte 15 und 39 geteilt ist, und dessen Enden an einer Strecke = 36 befestigt werden ($15^2 + 36^2 = 39^2$). Sie kennen auch den Gebrauch des Gnomon und beschäftigen sich ferner mit der Figurenverwandlung und der Verwendung des pythagoräischen Lehrsatzes zur Multiplikation eines gegebenen Quadrats. Statt der Quadratur des Kreises tritt eine Zirkulatur des Quadrats auf [16]), indem ein Kreis gesucht wird, der gleich einem gegebenen Quadrat ist. Dabei wird der Kreisdurchmesser = $\frac{4}{5}$ der Diagonale des Quadrats gesetzt, woraus $\pi = 3\frac{1}{8}$ (der bei den Römern auftretende Wert) folgt. In andern Fällen wird so verfahren, dass $\pi = 3$ sich ergibt.

Die Schriften *Aryabhattas* enthalten zwar einige falsche

Formeln zur Berechnung der Pyramide und der Kugel (für die Pyramide $V = \frac{1}{2}Gh$), sonst aber eine Reihe vollständig richtiger geometrischer Sätze. *Aryabhatta* gibt für π den Näherungswert $\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$. — *Brahmagupta* lehrt die rechnende oder Heronische Geometrie und kennt insbesondere die Dreiecksformel $\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\;(s-b)\;(s-c)}$, und fürs Viereck die Formel $i = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}$, welche er unrichtiger Weise auf ein beliebiges Viereck anwendet. Bei ihm findet sich auch neben $\pi = 3$ der Wert $\pi = \sqrt{10}$, ohne dass man zu sagen vermöchte, wie dieser Wert gefunden wurde. — *Bhâskara* pflegt ebenfalls nur die algebraische Geometrie. Für π gibt er nicht nur den griechischen Wert $\frac{22}{7}$ und den von *Aryabhatta* $\frac{62832}{20000}$, sondern auch einen Wert $\pi = \frac{754}{240} = 3{,}14166\ldots$ Geometrische Beweise kennt *Bhâskara* nicht; er stellt den Satz auf, fügt die Figur dazu und schreibt: »Sehet!« [16]).

Bei *Bhâskara* ist eine Uebertragung der Geometrie aus Alexandrien nach Indien unzweifelhaft nachweisbar, und vielleicht reichte dieser Einfluss noch weiter östlich zu den Chinesen. In einem chinesischen Werk über Mathematik, das vielleicht einige Jahrhunderte nach Christo verfasst wurde, tritt der pythagoräische Lehrsatz an dem Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 auf; es wird die Seilspannung angedeutet; die Ecken einer Figur werden griechischer Uebung zufolge mit Buchstaben bezeichnet; π ist $= 3$, gegen Ende des 6. Jahrhunderts $= \frac{22}{7}$ gesetzt.

Zu den Arabern gelangte griechische Geometrie teils unmittelbar, teils durch Vermittlung der Inder. Die Ehrerbietung jedoch, welche sie den klassischen Werken griechischer Abstammung entgegenbrachten, konnte den Mangel an eigener Triebkraft für neue Ideen nicht ersetzen; und so gelang es den Arabern in keinem Punkt der theoretischen

Geometrie, namentlich auch nicht in der Lehre von den Kegelschnitten, über das hinauszukommen, was die Blütezeit mathematischer Wissenschaft bei den Griechen hervorgebracht hatte[124]). — Von Einzelheiten möge nur weniges erwähnt sein. Bei *Alchwarizmî*[16]) findet sich ein Beweis des pythagoräischen Satzes, der nur darin besteht, dass ein in acht rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke zerlegtes Quadrat benützt wird. Im ganzen lehnt sich *Alchwarizmî* mehr an griechische als an indische Quellen an. Die Einteilung der Vierecke ist die euklidische; die Berechnungen sind nach der Art *Heron's* durchgeführt. Neben dem griechischen Wert $\pi = \frac{22}{7}$ treten die indischen Werte $\pi = \frac{62832}{20000}$ und $\pi = \sqrt{10}$ auf. — *Abûl Wafâ* hat ein Buch über geometrische Konstruktionen geschrieben. In demselben finden sich Zusammenordnungen von mehreren Quadraten zu einem einzigen, sowie die Beschreibung von Vielflächnern nach Angaben von *Pappus*. — Mit der Dreiteilung des Winkels beschäftigten sich nach griechischem Muster *Tâbit ibn Kurrah*, *Alkûhî* und *As-Sagani*. Bei späteren Mathematikern zeigt sich insbesondere die Gewandtheit, eine geometrische Aufgabe auf die Lösung einer Gleichung zurückzuführen, und dies ist in der That das Gebiet, in welchem die Araber durch geometrische Lösungen zwar schöne, aber nicht theoretisch bedeutsame Resultate erzielten.

E. Vierte Periode.

Von Gerbert bis Descartes.

Bei den westlichen Völkern findet man die ersten Spuren der Geometrie in den Werken *Gerbert's*, der als *Sylvester* II. den päpstlichen Stuhl bestieg. *Gerbert* stützt sich, wie es scheint, auf den Codex Arcerianus, nennt aber ausserdem auch *Pythagoras* und *Eratosthenes*[16]). Was hier gelehrt wird, ist fast ausschliesslich Feldmessung, wie bei *Boëthius*. Weiteres erfährt man erst aus *Leonardo's (Fibonacci's)* Practica geo-

metriae[47]) von 1220, in welchem Werk auf *Euklid*, *Archimedes*, *Heron* und *Ptolemäus* Bezug genommen wird. Die Verarbeitung des von den Alten überkommenen Stoffs ist in *Leonardo's* Schrift eine ziemlich selbständige, wie namentlich die Rektifikation des Kreises zeigt, wo dieser Mathematiker unabhängig von *Archimedes* mit Hilfe des regulären 96-Ecks $\pi = 1440 : 458\frac{1}{3} = 3{,}1418$ bestimmt.

Wenn schon bei den Alten eine eigentliche Theorie der Sternpolygone nicht nachgewiesen werden kann, so ist es nicht zu verwundern, dass auch das frühere Mittelalter kaum etwas davon aufzuweisen hat. Sternvielecke hatten zunächst nur eine mystische Bedeutung; sie wurden verwendet in der Teufelskunst als Drudenfuss, ferner in der Baukunst und Heraldik. Eingehender beschäftigte sich mit sternförmigen Polygonen *Adelard von Bath* in der von ihm kommentierten Euklidischen Geometrie; die Theorie dieser Figuren beginnt erst mit *Regiomontanus*.

Die erste deutsche mathematische Schrift ist die von *Konrad von Megenberg* in mittelhochdeutscher Sprache abgefasste »deutsche Sphära«, wahrscheinlich in Wien vor der Mitte des 14. Jahrhunderts geschrieben. Der erste gedruckte populäre Leitfaden der Geometrie erschien noch im 15. Jahrhundert anonym und brachte in sechs Blättern einfache Konstruktionsregeln für das Bauzeichnen. Der Anfang, enthaltend die Konstruktion des Lotes BC zu AB mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks ABC, in welchem BE die Hypotenuse AC halbiert, lautet folgendermassen[42]):

»Aus der geometrey etliche nutzparliche stueck, die hernach geschriben sten. 1. Zum ersten behend ein gerecht winckel mass zu machen So mach zwen riss uber einand angefert wie du wilt unn wo die riss uber einander geen da setz ein .*e*. Darnach setz ein zirckel mit einem ortt auf den Punkt .*e*. unn zeuch in auf als weit du wilt unn mach auf yde linj ein punckt. Das sein die puchstaben .*a*.*b*.*c*. daz

alles ein weiten sei Darnach mach ein linj von .*a*. in daz .*b*. und vom .*b*. in das .*c*. So hastu ein gerecht winkelmass des ein exempel hie stet.«

Diese nicht bei *Euklid*, sondern erst bei *Proklus* auftretende Konstruktion eines rechten Winkels scheint ums Jahr 1500 viel verbreiteter gewesen zu sein als die *Euklidische* Ausführung mit Hilfe des Winkels im Halbkreis. So soll *Adam Riese* durch seine Kenntnis dieser letzteren Konstruktion einen Baumeister gedemütigt haben, der seine rechten Winkel nur nach der Weise des *Proklus* zu zeichnen vermochte.

Als sehr alte geometrische Druckwerke in deutscher Sprache kennt man auch »Dz Puechlen der fialen gerechtikait« des *Mathias Roriczer* (1486) und *Albrecht Dürer's* »Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt« (Nürnberg 1525). Das erstere dieser beiden Werke gibt in wissenschaftlich dürftiger Weise Regeln über eine spezielle Aufgabe der gothischen Baukunst, das letztere dagegen bietet eine selbständigere Arbeit dar und beansprucht als solche mehr Interesse *).

Für die Verbreitung geometrischer Kenntnisse in Deutschland sorgten besonders *Widmann* und *Stifel*. *Widmann's* Geometrie beginnt wie die »Elemente« mit Erklärungen: »punctus ist ein klein Ding das nit zu theilen ist. — Angulus ist ein Winkel der da gemacht ist vō zweien lini« [31]). Die Vierecke tragen arabische Namen, ein sprechendes Zeugnis dafür, dass durch arabische Vermittlung altgriechisches Wissen in den Westen gebracht wurde. Jedoch ist *Widmann*, durch römische Schriftsteller (*Boëthius*) verleitet, zu manchen Irrtümern gekommen, wie er denn z. B. den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks von der Seite a zu $\frac{1}{2}a^2$ angibt.

In *Rudolff's* Coss kommt *Stifel* bei Gelegenheit der Lehre von den Potenzen auf einen Punkt zu sprechen, der in der modernen Geometrie erst seine volle Würdigung gefunden hat, nemlich auf die Berechtigung der Zulassung von mehr als

---

*) Günther in Schlömilch's Zeitschr. XX. Hl. 2.

drei Dimensionen. »Dieweil wir aber seyen in der Arithmetica | da vns viel dings erlaubt wirt zu dichten | das sonst gar kein gestalt hat | wirt auch dis erlaubt | das die Geometria nicht zulasset | Nemlich das wir cörperliche Linien vnd superfices setzen | vnd über den cubum hinauss faren | gleych als weren mehr denn drey dimensiones | welchs doch auch weder die Natur ist. ... Es hat aber sollichs guten glympff | von wegen des lieplichen vnd wunderbarlichen brauchs der Coss«[107]). — *Stifel* behandelt ferner nach *Ptolemäus* die Berechnung von regelmässigen Vielecken, nach *Euklid* die Konstruktion regulärer Körper. Er spricht sich auch über die Quadratur des Kreises aus; letzteren sieht er als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten an und erklärt die Quadratur für unmöglich. Nach *Albrecht Dürer's* »Underweysung« etc. erhält man die Quadratur des Kreises, wenn die Diagonale des Quadrats zehn Teile misst, wie der Kreisdurchmesser deren acht hat; d. h. es wird $\pi = 3\frac{1}{8}$ angenommen. Ausdrücklich wird dabei hervorgehoben, dass es sich hiebei nur um eine Näherungskonstruktion handelt: »Von nöten wer zu wisen quadratura circuli | das ist die vergleychnus eines cirkels | vnnd eines quadrates | also das eins als vil inhielt als dz ander | aber soliches ist noch nit von den gelerten demonstrit Mechanice | aber das ist beyleyfig | also das es im werck nit | oder gar ein kleyns fele | mag diese vergleychnuss also gemacht werden«[27]).

Ueber die Kreisberechnung erschien 1584 von *Simon van der Eycke* eine Schrift, in welcher für π der Wert $\frac{1521}{484}$ angegeben war. Durch Berechnung der Seite des regulären 192-Ecks fand *Ludolf van Ceulen* im Jahr 1585, dass $\pi < 3{,}142505 < \frac{1521}{484}$ sei. In seiner Erwiderung bestimmte *S. v. d. Eycke* π zu 3,1446053, worauf *L. v. Ceulen* 1586 für π als obere Grenze 3,1427232, als untere 3,14103 angab. *L. v. Ceulen's* Nachlass enthielt π auf 34 Stellen berechnet, und dieser Wert der »*Ludolf'schen* Zahl« kam auf sein Grabmal in der Kirche von St. Peter in Leyden. *Ceulen's* Forschungen regten u. a. *Snellius* und *Huygens*

zu weiteren Arbeiten an. Erst durch die Theorie der stark konvergenten Reihen ist es möglich geworden, π auf 500 und mehr Dezimalstellen zu berechnen*).

Ein Wiederaufleben der Geometrie knüpft sich an *Viète's* und *Keppler's* Wirksamkeit. Mit diesen Forschern fängt eine Zeit an, deren mathematischer Sinn über die Arbeiten der Alten hinauszugehen beginnnt [19]). *Viète* vervollständigt die analytische Methode *Platon's*; er lehrt in sinnreicher Weise die geometrische Konstruktion der Wurzeln von Gleichungen des zweiten und dritten Grads; er löst auch die Aufgabe über den Berührungskreis zu drei gegebenen Kreisen auf elementare Weise. — Noch Hervorragenderes leistet *Keppler*. Für ihn bildet die Geometrie den Schlüssel zu den Geheimnissen der Welt. Er betritt sicheren Schritts den Weg der Induktion und schliesst sich bei seinen geometrischen Untersuchungen in freier Weise an *Euklid* an. *Keppler* ist der Begründer der Symbolik des »goldenen Schnitts«, jener Aufgabe des *Eudoxus*, welche im sechsten Buch der Elemente *Euklid's* die Fassung hat: »Eine begrenzte Gerade im äussern und mittleren Verhältnis zu teilen« [104]). Diese Aufgabe, von welcher *Keppler* neben »proportio divina« die Bezeichnung »sectio divina« einführt, ist in seinen Augen von so hoher Bedeutung, dass er zu dem Ausspruch kommt: »die Geometrie hat zwei grosse Schätze; einer ist der Satz des *Pythagoras*, der andere die Teilung einer Linie im äussern und mittleren Verhältnis. Den ersten kann man einer Masse Goldes vergleichen, den andern einen kostbaren Edelstein nennen.«

Die Ausdrucksweise »Goldener Schnitt« ist erst neueren Ursprungs; sie findet sich in keinem der Lehrbücher des 18. Jahrhunderts, und scheint durch Uebertragung aus dem gemeinen Rechnen gebildet worden zu sein. In den Rechenbüchern des 16. und 17. Jahrhunderts heisst die Regel de tri häufig »die goldene Regel«. Seit Anfang des 19. Jahrhunderts trat diese goldene Regel vor dem sogenannten

*) D. Bierens de Haan in Nieuw. Arch. I.

Schlussrechnen der *Pestalozzi'schen* Schule mehr und mehr in den Hintergrund, und in der Folge erschien statt der »goldenen Regel«, die kein Rechenbuch mehr kannte, in den Elementarbüchern der Geometrie um die Mitte des 19. Jahrhunderts ein »goldener Schnitt«, wohl unstreitig im Zusammenhang mit gleichzeitigen Bestrebungen, welche darauf abzielten, dieser geometrischen Konstruktion die Wichtigkeit eines Naturgesetzes beizumessen.

Besonders studierte *Keppler*, veranlasst durch seine astronomischen Spekulationen, die regulären Vielecke und Sternpolygone. *Keppler* spricht schon von Gruppen elementar konstruierbarer regulärer Vielecke, nemlich von den Reihen der Polygone mit den Seitenzahlen $4 . 2^n$, $3 . 2^n$, $5 . 2^n$, $15 . 2^n$ (von $n = 0$ an) und sagt, dass ein reguläres Siebeneck nicht mit Hilfe des Kreises und der Geraden allein konstruierbar sei. — Unzweifelhaft ist auch, dass *Keppler* über die Kegelschnitte des *Apollonius* gut unterrichtet und in der Lösung von Aufgaben mit Hilfe dieser Kurven erfahren war. Bei ihm findet sich zum ersten Mal die Bezeichnung »Brennpunkte« für die Punkte der Kegelschnitte, welche der frühere Sprachgebrauch als »puncta ex comparatione«, »puncta ex applicatione facta«, »umbilici« oder »Pole« bezeichnet hatte*); ferner die Benennung »Excentricität« für das Verhältnis des Abstandes eines Brennpunktes vom Mittelpunkt zur grossen Halbaxe der Kurve zweiter Ordnung, und der Name »excentrische Anomalie« für den Winkel $P'OA$, wo OA die grosse Halbaxe einer Ellipse ist, und P' der Punkt, in welchem die zum Kurvenpunkt P gehörige Ordinate den Kreis über der grossen Axe trifft [6a]).

Auch durch stereometrische Untersuchungen, welche in bescheidenem Grad von *Dürer* und *Stifel* betrieben worden waren, ragt *Keppler* über seine Zeitgenossen hervor. In seiner Harmonice Mundi handelt er nicht bloss von den fünf regulären platonischen und dreizehn halbregulären archimedischen

*) C. Taylor in Cambr. Proc. IV.

Körpern, sondern auch noch von Sternpolygonen und vom zwölfeckigen und zwanzigeckigen Sterndodekaëder. Dazu kommen Inhaltsberechnungen von Körpern, die sich durch Umdrehung von Kegelschnitten um Durchmesser, Tangenten oder Sekanten erzeugen lassen. Solche Bestimmungen von Rauminhalten wurden auch durch *Cavalieri* und *Guldin* ausgeführt. Ersterer benützte eine glückliche Umformung der Exhaustionsmethode, letzterer erweiterte eine Regel, die schon *Pappus* kannte, ohne deren genauen Beweis zu geben (s. S. 166).

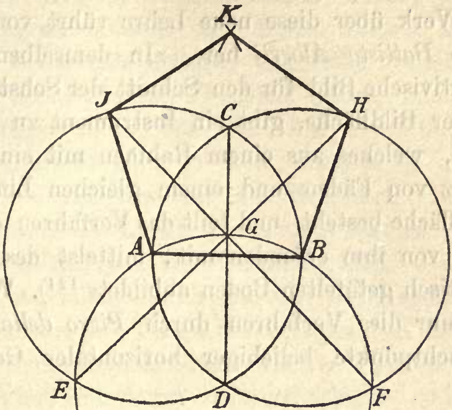
In diese Zeit fallen die ältesten bekannten Versuche zur Lösung geometrischer Aufgaben mit nur einer Zirkelöffnung, ein Bestreben, das erst durch *Steiner's* »geometrische Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises« (1833) einen streng wissenschaftlichen Ausdruck fand. Die ersten Anzeichen solcher Konstruktionen *) gehen bis auf *Abul Wâfa* zurück. Von den Arabern vererbten sie sich auf die italienische Schule, wo sie in den Arbeiten von *Leonardo da Vinci* und von *Cardano* auftreten. Letzterer erhielt die Anregung dazu von *Tartaglia*, der in seinem Problemen-Duell gegen *Cardano* und *Ferrari* derartige Ausführungen verlangte. Sie treten auch auf in der »Resolutio omnium Euclidis problematum« (Venedig 1553) des *Benedictis*, eines Schülers *Cardano's*, in der »Geometria deutsch« und in einer Fünfeckskonstruktion von *Dürer*. Dieser gibt in seiner »Underweysung« etc. eine geometrisch genaue Konstruktion des regulären Fünfecks, dann aber auch eine genäherte Konstruktion derselben Figur »aus unverrucktem zirckel zu machen.«

Dieses Verfahren lehrt zur Konstruktion eines regulären Fünfecks über AB um A und B Kreise konstruieren mit AB, welche sich in C und D schneiden; der Kreis um D mit DA schneidet die Kreise um A und B in E und F, und die gemeinsame Sehne CD in G; dieselben Kreise werden von FG und EG in J und H geschnitten; AJ und BH

---

*) Günther in Schlömilchs Zeitschr. XX.

sind weitere Seiten des regulären Fünfecks. (Die Berechnung dieses symmetrischen Fünfecks liefert für den Winkel *ABH* 108° 20′, während der Umfangswinkel des regulären Fünfecks = 108° ist).



Bei *Dürer* und allen denjenigen, welche nach ihm über geometrische Konstruktionsregeln schrieben, findet sich auch eine näherungsweise Konstruktion des regulären Siebenecks: »Die Siebenecksseite ist die Hälfte der Dreiecksseite«, während aus der Rechnung sich die halbe Dreiecksseite als das 0,998fache der Siebenecksseite ergibt. — Auch *Daniel Schwenter* lieferte Konstruktionen mit einer Zirkelöffnung in »Geometriae practicae novae« (Nürnberg 1667).

Dürer hat, wie aus der schon mehrfach angeführten Schrift: »Underweysung der Messung etc.« ersichtlich geworden ist, entschiedene Verdienste um die Entwicklung der Lehre von den höheren Kurven. Er gab eine allgemeine Auffassung des Asymtotenbegriffs und fand als neue Formen höherer Kurven gewisse cyklische Kurven und Muschellinien.

Vom 15. Jahrhundert an machen die Projektionsmethoden einen weiteren Fortschritt. *Jan van Eyck* [121]) befolgt in dem grossen Gentner Altarbild perspektivische Gesetze, z. B. die Anwendung des Fluchtpunkts, aber ohne diese Sätze mathematisch erfasst zu haben. Dies trifft erst bei *Albrecht Dürer* zu, der in seiner »Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt« Aug- und Distanzpunkt benützt, und das

perspektivische Bild durch Grund- und Aufriss konstruieren lehrt. — In Italien ist die Perspektive durch den Architekten *Brunelleschi* und den Bildhauer *Donatello* ausgebildet worden. Das erste Werk über diese neue Lehre rührt von dem Baumeister *Leo Battista Alberti* her. »In demselben erklärt er das perspektivische Bild für den Schnitt der Sehstrahlenpyramide mit der Bildfläche, gibt ein Instrument zu seiner Herstellung an, welches aus einem Rahmen mit einem quadratischen Netz von Fäden und einem gleichen Liniennetz auf der Zeichenfläche besteht, und teilt das Verfahren des Distanzpunktes als von ihm erfunden mit, mittelst dessen er dann den quadratisch getäfelten Boden abbildet«[121]. Weitere Ausbildung erfuhr dies Verfahren durch *Piero della Francesca,* der die Fluchtpunkte beliebiger horizontaler Geraden verwertete.

Auf deutschem Gebiet wurde die Perspektive besonders eifrig in Nürnberg gepflegt, wo der Goldschmied *Lencker* einige Jahrzehnte nach *Dürer* dessen Darstellungsverfahren ausbildete. Die erste französische Perspektive verdankt man dem Maler *J. Cousin* (1560), der im »Livre de la perspective« den Aug- und Distanzpunkt, daneben nach *Piero* die Fluchtpunkte horizontaler Geraden anwendet. Wesentlich weiter geht *Guido Ubaldi,* indem er den Fluchtpunkt von Scharen paralleler Geraden beliebiger Richtung einführt. Was *Ubaldi* nur ahnen lässt, wird von *Simon Stevin* in den Hauptzügen klar erfasst; er legt durch einen Fundamentalsatz den Grund zur Ausbildung der Lehre von der Kollineation.

F. Fünfte Periode.

Von Descartes bis zur Gegenwart.

Seit *Apollonius* war eine Reihe von Jahrhunderten verflossen, und doch hatte niemand die Höhe griechischer Geometrie ganz zu erreichen vermocht, teils weil verhältnismässig

wenige Quellen, und diese selbst nur schwer und oft nur auf Umwegen zugänglich waren, teils aber auch, weil man den griechischen Untersuchungsmethoden fremd, aber gläubig staunend gegenüberstand. Aus diesem Zustand der teilweisen Lähmung, des hilfsbedürftigen und Hilfe suchenden Mühens wurde die Geometrie von *Descartes* erlöst, nicht etwa durch blosses Zufügen verwandter Gedanken zur alten Raumlehre, sondern vermittelst einer in ihrer Einfachheit genialen Verknüpfung der Algebra mit der Geometrie, wodurch eine neue Schöpfung entstand: die analytische Geometrie.

Vorbereitend hatten viele Geometer, allen voran *Apollonius*, die wichtigsten elementaren Kurven, die Kegelschnitte, auf ihre Durchmesser und Tangenten bezogen und diese Beziehung durch Gleichungen ersten Grads zwischen Flächen ausgedrückt, so dass gewisse Relationen zwischen Strecken stattfanden, die nichts anderes als Abscissen und Ordinaten waren.

In den Kegelschnitten des *Apollonius* finden sich Ausdrücke, die mit »ordinatim applicatae« und »abscissae« übersetzt wurden. Den ersteren dieser Ausdrücke ersetzte *Fermat* durch »Applikate«, andere schrieben statt dessen »Ordinate«. Abscisse und Ordinate heissen seit *Leibniz* (1692) »Coordinaten« [5a]).

Schon im 14. Jahrhundert findet sich als Lehrgegenstand der Hochschulen eine Art Coordinatengeometrie, die »Latitudines formarum«. Es bedeutete [42]) »latitudo« die Ordinate, »longitudo« die Abscisse eines auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen veränderlichen Punktes, und die verschiedenen Lagen dieses Punktes bildeten die »figura«. Die Kunstwörter »Länge« und »Breite« waren offenbar dem astronomischen Sprachgebrauch entnommen worden. In Ausübung dieser Kunst beschränkte sich *Oresme* auf den ersten Quadranten, in welchem er Gerade, Kreise und sogar die Parabel behandelte, aber immer derart, dass nur ein positiver Wert einer Coordinate berücksichtigt wurde.

Zu den Vorgängern *Descartes'* gehören ausser *Apollonius* insbesondere *Viète*, *Oresme*, *Cavalieri*, *Roberval* und *Fermat*, der bedeutendste unter ihnen auf diesem Gebiet; aber nirgends, auch von *Fermat* nicht, war ein Versuch gemacht worden, mehrere Kurven verschiedener Ordnung gleichzeitig auf ein Coordinatensystem zu beziehen, das höchstens für eine der krummen Linien spezielle Bedeutung hatte, und gerade dies hat *Descartes* systematisch gethan.

Der Gedanke, durch welchen *Descartes* die arithmetischen Gesetze der Geometrie dienstbar gemacht, wird von ihm selbst folgendermassen ausgesprochen [74]):

»Alle Probleme der Geometrie lassen sich auf Ausdrücke reduzieren, die man konstruieren kann, wofern die Länge von nur einigen Strecken bekannt ist. Und da die ganze Arithmetik nur vier oder fünf Operationen umfasst, nemlich die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation, die Division und das Wurzelausziehen, das man als eine gewisse Art der Division betrachten kann, so hat man in der Geometrie, um die gesuchten Linien zu finden, nur folgendermassen zu verfahren: Man addiert zum gegebenen Ausdruck andere bekannte Strecken, oder subtrahiert dieselben von ihm; oder man wählt, um die Beziehung zu den Zahlen noch auffälliger zu machen, eine beliebige Strecke als E i n h e i t. Sucht man dann zu dieser und zwei andern gegebenen Strecken eine vierte, welche sich zu einer der beiden verhält, wie die andere zur Einheit, so hat man dasselbe gethan wie bei der Multiplikation*); oder aber man sucht eine vierte Strecke, welche sich zu einer der beiden gegebenen verhält wie die Einheit zur andern**), so hat man dividiert; oder man sucht eine oder zwei oder mehrere mittlere Proportionalen zur Einheit und irgend einer andern Strecke, so hat man die zweite,

---

*) $c:a = b:1$, $c = ab$.

**) $c:a = 1:b$, $c = a:b$.

dritte, . . . Wurzel ausgezogen*). — Ich scheue mich nicht, diese Ausdrücke der Arithmetik in die Geometrie einzuführen, um mich bestimmter ausdrücken zu können. Man möge bemerken, dass ich unter a^2, b^3 und ähnlichen Grössen für gewöhnlich einfache Strecken verstehe, und ich nenne sie nur Quadrat oder Kubus, um mich der geläufigen algebraischen Ausdrücke zu bedienen.« (Es ist a^2 die dritte Proportionale zur Einheit und a, oder $1 : a = a : a^2$, und ähnlich $b : b^2 = b^2 : b^3$).

Diese Betrachtungsweise arithmetischer Ausdrücke hat die von *Descartes* gemachten geometrischen Entdeckungen wesentlich beeinflusst. Wie schon *Apollonius* Punkte eines Kegelschnitts durch parallele Sehnen nebst deren in der Richtung des konjugierten Durchmessers gerechneten Abständen von einer demselben System angehörigen Tangente bestimmt, so ist bei *Descartes* jeder Punkt einer Kurve der Schnitt zweier Geraden. *Apollonius* und alle seine Nachfolger verwenden jedoch solche Scharen paralleler Geraden nur zufällig und stets nur in der Absicht, eine bestimmte Eigenschaft der Kegelschnitte besonders deutlich hervortreten zu lassen; *Descartes* dagegen löst diese Systeme paralleler Geraden von den Kurven los, weist ihnen eine selbständige Existenz zu und erreicht so für jeden Kurvenpunkt eine Beziehung zweier Strecken vorgegebener Richtung, die nichts weiter ist als eine Gleichung, und das geometrische Studium der Eigenschaften dieser Kurve kann durch die Untersuchung der Gleichung nach den Methoden der Algebra ersetzt werden. Die fundamentalen Elemente zur Bestimmung eines Kurvenpunkts sind seine Coordinaten, und durch längst bekannte Sätze war evident, dass ein Punkt der Ebene durch zwei, ein Punkt des Raumes durch drei Coordinaten festgelegt werden kann.

Descartes' »Géometrie« ist nicht etwa ein Lehrbuch der

---

*) $1 : a = a : b = b : c = c : d = \ldots$ gibt $a = \sqrt{b} = \sqrt[3]{c} = \sqrt[4]{d} \ldots$

analytischen Geometrie [74]), sondern nur ein kurzer Abriss, der die Grundlagen dieser Disciplin in grossen Zügen andeutet. Unter den drei Büchern, welche das ganze zusammensetzen, handeln bloss die zwei ersten von der Geometrie; das dritte ist algebraischer Natur und enthält die berühmte Zeichenregel, an einem einfachen Beispiel erklärt, sowie die Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grads nebst der Konstruktion ihrer Wurzeln durch Kegelschnitte.

Den ersten Anstoss zu seinen geometrischen Ueberlegungen verdankt *Descartes*, wie er selbst sagt, einer Aufgabe, die nach den Berichten des *Pappus* schon *Euklid* und *Apollonius* beschäftigte. Es ist die Aufgabe, den Ort zu drei, vier oder mehreren Geraden zu finden. Sind die in vorgeschriebenen Richtungen gemessenen Abstände eines Punktes P von den Geraden $g_1, g_2, \ldots g_n$ beziehungsweise $e_1, e_2, \ldots e_n$, so soll sein

$$\text{für 3 Gerade:} \quad \frac{e_1 e_2}{a e_3} = k,$$

$$\text{für 4 Gerade:} \quad \frac{e_1 e_2}{e_3 e_4} = k,$$

$$\text{für 5 Gerade:} \quad \frac{e_1 e_2 e_3}{a\, e_4\, e_5} = k,$$

u. s. f. Von den Griechen rührt die Lösung der zwei ersten Fälle her, welche Kegelschnitte liefern. — Kein Beispiel hätte die Vorzüge der neuen Methode besser zeigen können als dieses. Für den Fall von drei Geraden bezeichnet *Descartes* eine Entfernung mit y, den Abstand des Fusspunktes derselben von einem festen Punkt der zugehörigen Geraden mit x und beweist dann, dass jede andere in Frage kommende Strecke leicht konstruierbar ist. Ferner gibt er an, »dass wenn man nach und nach y um unendlich wenig wachsen lässt, auch x um unendlich wenig wächst und man auf diese Weise unendlich viele Punkte des fraglichen Orts bekommt«.

Die Kurven, welche *Descartes* nach und nach kennen lehrt, teilt er merkwürdigerweise so ein, dass die Linien erster und zweiter Ordnung eine erste, die dritter und vierter Ordnung eine zweite, die fünfter und sechster Ordnung eine dritte Gruppe bilden, und so fort. Erst *Newton* nennt eine Kurve, welche durch eine algebraische Gleichung $n$ten Grads zwischen ihren Parallelcoordinaten bestimmt ist, eine Linie $n$ter Ordnung, oder auch eine Kurve $(n-1)$ter Gattung. Die Einteilung in algebraische und transcendente Kurven hat *Leibniz* eingeführt; vor ihm hiessen nach dem Vorgang der Griechen die ersteren geometrische, die letzteren mechanische Linien [5a]).

Unter den Anwendungen, die *Descartes* macht, ragt das Tangentenproblem hervor, und dies behandelt er in eigentümlicher Weise: er beschreibt um den auf der x-Axe gelegenen Fusspunkt der im Kurvenpunkt P errichteten Normale einen Kreis durch P und drückt aus, dass dieser Kreis die Kurve im Punkte P in zwei aufeinanderfolgenden Punkten schneidet, d. h. er stellt die Bedingung auf, dass nach der Elimination von x die Gleichung in y eine Doppelwurzel hat.

Eine natürliche Folge der Annahme des *Descartes'schen* Coordinatensystems war auch die Zulassung von negativen Wurzeln bei algebraischen Gleichungen. Diese negativen Wurzeln hatten nun eine reale Bedeutung; man vermochte sie darzustellen und musste sie deshalb den positiven Wurzeln gleichberechtigt zur Seite geben.

In der unmittelbar auf *Descartes* folgenden Zeit erfährt die Geometrie durch *Cavalieri*, *Fermat*, *Roberval*, *Wallis*, *Pascal* und *Newton* Bereicherungen, nicht zunächst durch blosse Anwendung der Coordinatengeometrie, sondern noch vielfach auf dem Wege der altgriechischen, zum Teil wesentlich vervollkommneten Methoden. Das letztere gilt in besonderem Sinn von *Cavalieri*, dem Erfinder der »Methode der unteil-

baren Grössen« *), welche nach kurzer Zeit durch die Integralrechnung verdrängt wurde, hier aber ihre Stelle finden mag, da sie ausschliesslich im Dienste der Geometrie stand. *Cavalieri* beschäftigte sich gerne mit der Geometrie der Alten. So ist er z. B. der erste gewesen, welcher einen befriedigenden Beweis der sogenannten Guldin'schen Regel, die schon *Pappus* anführt, beibrachte. Sein Hauptbestreben ging darauf aus, ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung von Flächen und Kubikinhalten, sowie von Schwerpunkten zu finden, und zu diesem Zweck formte er die Exhaustionsmethode um. Da *Cavalieri's* Methode, die er im Jahr 1629 schon besass, noch heutzutage in elementaren Fällen die Integration mit Vorteil zu ersetzen imstande ist, so möge hier ihr Wesen in kurzen Zügen geschildert werden [74]).

Ist $y = f(x)$ in rechtwinkligen Coordinaten die Gleichung einer Kurve, von welcher eine zwischen einem Kurvenbogen, der x-Axe und den zu x_0 und x_1 gehörigen Ordinaten gelegene Fläche bestimmt werden soll, so teilt *Cavalieri* den Unterschied $x_1 - x_0$ in n gleiche Teile; ein solcher Teil sei h, und n werde sehr gross genommen. Ein Element der Fläche ist alsdann $= hy = h \,.\, f(x)$ und die ganze Fläche wird

$$\sum_{0}^{n-1} h \,.\, f(x_0 + nh).$$

Für $n = \infty$ erhält man offenbar nichts anderes als

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx.$$

Aber dies ist nicht die Grösse, welche *Cavalieri* zu bestimmen

---

*) In französischen Werken »Méthode des indivisibles«, ursprünglich in dem Werk: »Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota«; Bologna 1635.

sucht; er bildet nur den Quotienten aus der gesuchten Fläche und dem Rechteck mit der Grundlinie $x_1 - x_0$ und der Höhe y_1, so dass die zu bestimmende Grösse die folgende ist:

$$\frac{\sum_0^{n-1} h \,.\, f(x_0 + nh)}{n \,.\, h \,.\, f(x_1)} = \frac{\sum_0^{n-1} f(x_0 + nh).}{n f(x_1)}.$$

Cavalieri wendet diese Formel, die er übrigens in voller Allgemeinheit nach Analogiegründen aufstellt, nur an, wenn $f(x)$ von der Form Ax^m ($m = 2, 3, 4$) ist. Die Ausdehnung auf weitere Fälle erfolgte durch *Roberval*, *Wallis* und *Pascal*.

In den einfachsten Fällen liefert die Methode der unteilbaren Grössen folgende Ergebnisse [74]). Für ein Parallelogramm wird die unteilbare Grösse oder das Flächenelement eine Parallele zur Grundlinie; die Anzahl der unteilbaren Grössen ist proportional der Höhe; daher kann als Mass für die Fläche des Parallelogramms das Produkt aus den Masszahlen der Grundlinie und Höhe gelten. Der entsprechende Schluss gilt für das Prisma. Um eine Dreiecksfläche mit dem Parallelogramm von derselben Grundlinie und Höhe zu vergleichen, wählt man wieder eine Zerlegung in Elemente durch Parallelen zur Grundlinie in gleichen Abständen von einander; die Elemente des Dreiecks sind dann, vom kleinsten beginnend, $1, 2, 3, \ldots n$, die des Parallelogramms $n, n, \ldots n$, also der Quotient

$$\frac{\text{Dreieck}}{\text{Parallelogramm}} = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n \,.\, n} = \frac{\frac{1}{2} n\,(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big),$$

woraus für $n = \infty$ der Wert $\frac{1}{2}$ folgt. Für die entsprechenden Körper erhält man ebenso

$$\frac{\text{Pyramide}}{\text{Prisma}} = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \frac{\frac{1}{6} n(n+1)\,(2n+1)}{n^3}$$

$$= \frac{1}{6}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\,\Big(2 + \frac{1}{n}\Big)\Big|_{n=\infty} = \frac{1}{3}.$$

Diese geometrisch-analytische Methode *Cavalieri's* wurde

nach Verfluss einiger Jahrzehnte von der für alle Fälle ohne weitere Vorbereitung brauchbaren Integralrechnung ganz in den Hintergrund gedrängt. Zunächst aber trat *Roberval*, von dem Tangentenmethoden bekannt sind, ganz in die Fussstapfen *Cavalieri's*. *Wallis* benützte die Arbeiten *Descartes'* und *Cavalieri's* gleichzeitig und betrachtete besonders Kurven, deren Gleichung die Form $y = x^m$ hat, indem er für m ganze und gebrochene, positive und negative Zahlen einsetzte. Sein Hauptverdienst besteht darin, dass er in einer lichtvollen Abhandlung *Descartes'* Erfindung würdigte und dieselbe zugänglicher machte. In diesem Werk definiert *Wallis* auch die Kegelschnitte als Kurven zweiten Grads, was vor ihm nicht in derselben entschiedenen Weise geschehen war.

Pascal erweist sich als talentvoller Schüler von *Cavalieri* und *Desargues*. In der 1639 verfassten, aber erst 1779 veröffentlichten »Geometrie der Kegelschnitte« *Pascal's* findet sich das »*Pascal'sche* Theorem« vom Sehnensechseck, vom »Hexagramma mysticum«, wie er es nannte, welches *Bessel* 1820 noch einmal entdeckte, ohne von der früheren Arbeit *Pascal's* eine Ahnung zu haben*); ferner der auf *Desargues* zurückgehende Satz, dass wenn eine Gerade einen Kegelschnitt in P und Q, die Seiten eines demselben angehörigen Sehnenvierecks in A, B, C, D trifft, die Gleichung besteht:

$$\frac{PA \,.\, PC}{PB \,.\, PD} = \frac{QA \,.\, QC}{QB \,.\, QD}.$$

Pascal's letztes Werk beschäftigt sich mit einer Kurve die von ihm Roulette, von *Roberval* Trochoïde, später allgemein Cykloide genannt wurde. Schon *Bouvelles* (1501) kannte die Konstruktion dieser Kurve. *Galilei* hat sich, wie aus einem Brief an *Toricelli* vom Jahr 1639 zu ersehen ist, ein-

---

*) Bianco in Torino Att. XXI.

gehender mit Rollkurven beschäftigt, und zwar zum Zweck der Konstruktion von Brückenbogen. Die Quadratur der Cykloide und die Bestimmung des Volumens des der Axe zugeordneten Umdrehungskörpers führte *Roberval* aus, die Tangentenkonstruktion aber *Descartes.* Im Jahr 1658 war *Pascal* imstande, die Bogenlänge eines Segments der Cykloide, den Schwerpunkt dieser Fläche und den zugehörigen Rotationskörper zu bestimmen. Später erscheint die Cykloide in der Physik als Brachystochrone und Tautochrone, da sie sowohl einen auf ihr fallenden Körper in kürzester Zeit von einem Punkt zum andern gelangen lässt, als auch einen auf ihr pendelnden materiellen Punkt immer in derselben Zeit an seine tiefste Stelle führt. — Mit isoperimetrischen Problemen hatten sich unter anderen *Jakob* und *Johann Bernoulli* abgegeben; aber nur der erstere erzielte bei solchen Studien wirkliche Erfolge, indem er eine strenge Methode zur Lösung derartiger Aufgaben anzugeben vermochte, welche durch *Johann Bernoulli* nur eine unbedeutende Vereinfachung erfuhr (s. S. 138).

Die auf *Pascal's* Thätigkeit folgenden Jahrzehnte wurden noch zum grossen Teil durch die Beschäftigung mit Tangenten- und den dazu gehörigen Normalenproblemen ausgefüllt, aber gleichzeitig entwickelte sich die allgemeine Theorie der ebenen Kurven mehr und mehr. *Barrow* gab ein neues Verfahren zur Bestimmung der Tangenten; *Huygens* beschäftigte sich mit der Evolute einer Kurve und bezeichnete den Weg zur Berechnung des Krümmungshalbmessers. Durch die Betrachtung der kaustischen Linien kam *Tschirnhausen* auf die Evolventen, und *Maclaurin* konstruierte den Krümmungskreis in einem Punkt einer algebraischen Kurve. Die wichtigste Bereicherung dieser Theorie erfolgte durch *Newton's* »Enumeratio linearum tertii ordinis« (1706). Diese Abhandlung stellt den Unterschied algebraischer und

transcendenter Kurven fest; dann betrachtet sie eingehend die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung und findet daraus zahlreiche solcher Kurven, welche sich als »Schatten« von fünf Typen darstellen lassen, was eine wesentliche Förderung der Perspektive in sich schliesst. — *Newton* wusste auch Kegelschnitte aus fünf Tangenten zu konstruieren; er kam auf diese Entdeckung durch das Bestreben, ohne analytische Geometrie »nach Art der Alten« zu untersuchen. Ferner betrachtete *Newton* m e h r f a c h e Punkte einer Kurve im Endlichen und Unendlichen, und gab Regeln zur Untersuchung des Verlaufs einer Kurve in der Nähe eines ihrer Punkte (»*Newton'sches* Parallelogramm« oder »analytisches Dreieck«), sowie zur Bestimmung der Ordnung der Berührung zweier Kurven in einem ihrer Punkte. (Ueber Oskulationen hatten auch *Leibniz* und *Jakob Bernoulli* geschrieben; *Plücker* nannte (1831) die Stelle, wo zwei Kurven k aufeinanderfolgende Punkte gemein haben, »einen k-punktigen Kontakt«; in demselben Fall hatte *Lagrange* 1779 von einem »Kontakt $(k - 1)$ter Ordnung« gesprochen) [5a]).

Weitere Arbeiten lieferten *Newton's* Schüler *Cotes* und *Maclaurin*, sowie *Waring*. *Maclaurin* [18a]) machte interessante Untersuchungen über entsprechende Punkte auf einer Kurve dritter Ordnung und zeigte dadurch, dass die Theorie eben dieser krummen Linien viel umfassender sei als die der Kegelschnitte. *Euler* trat ebenfalls in diese Untersuchungen ein durch seinen Aufsatz »Sur une contradiction apparente dans la théorie des courbes planes« (Berlin 1748), worin gezeigt wurde, dass durch acht Schnittpunkte zweier Kurven dritter Ordnung der neunte vollständig bestimmt ist. Dieser Satz, der das *Pascal'sche* Theorem für Kegelschnitte einschliesst, führte die Punktgruppen oder Systeme von Punkten des Schnitts zweier Kurven, in die Geometrie ein. — Dieser *Euler'sche* Satz wurde 1750 von *Cramer*, welcher sich vorzugsweise mit den Singularitäten der Kurven beschäftigte, bei seinen Arbeiten über

den Schnitt zweier algebraischen Kurven höherer Ordnung bemerkt; daher trägt der scheinbare Widerspruch zwischen der Zahl der eine ebene algebraische Kurve bestimmenden Punkte und der Zahl der unabhängigen Schnittpunkte zweier Kurven derselben Ordnung den Namen »*Cramer'sches* Paradoxon«. Der Widerspruch wurde erst 1818 von *Lamé* durch das Prinzip, das seinen Namen trägt, gelöst [69]).

Teils im Anschlusse an bekannte Resultate der griechischen Geometrie, teils unabhängig davon, wurden einige besondere algebraische und transcendente Kurven untersucht. Eine Linie, welche dieselbe Entstehung hat wie die Conchoide des *Nicomedes*, wenn die Gerade durch einen Kreis ersetzt wird, hat von *Roberval* den Namen »Limaçon de Pascal« erhalten; ein besonderer Fall dieser Schnecke ist die Cardioide des 18. Jahrhunderts. — Wenn mit Bezug auf zwei gegebene Punkte A, B ein Punkt P der Bedingung genügt, dass eine lineare Funktion der Entfernungen PA und PB einen konstanten Wert hat, so ist der Ort für P ein Descartes'sches Oval, diese Kurve hatte *Descartes* bei seinen dioptrischen Arbeiten aufgefunden. Für $PA \,.\, PB =$ const. ergibt sich die Cassini'sche Linie, welche der Astronom *Ludwigs* XIV. an Stelle der *Keppler'schen* Ellipse als Planetenbahn betrachtet haben wollte. *Cassini's* Linie kann in besonderen Fällen eine Schlinge bilden, und diese Form wurde von *Jakob Bernoulli* 1694 Lemniscate genannt. — Mit der Betrachtung der Logarithmischen Linie $y = a^x$ hing die von *J. Bernoulli*, *Leibniz* u. a. gegebene Untersuchung der Gleichgewichtsfigur eines nicht dehnbaren, biegsamen Fadens zusammen; sie lieferte die Kettenlinie (catenaria, 1691). — Die Gruppe der von *Archimedes* erfundenen Spiralen wurde im Verlauf des 17. und 18. Jahrhunderts durch die hyperbolische, parabolische und logarithmische Spirale, sowie durch den Lituus von *Cotes* (1722) erweitert.

— *Tschirnhausen* definierte 1687 eine von der griechischen verschiedene Quadratrix als Ort eines Punktes P, der auf $LQ \parallel BO$ und gleichzeitig auf $MP \parallel OA$ liegt (OAB ist ein Quadrant), wo L den Quadranten und M den Halbmesser OB gleichförmig durchläuft. — Auch ganze Systeme von Linien und Flächen wurden betrachtet; dazu gehören die Untersuchungen über Evolventen und Evoluten, allgemein über Enveloppen, wie man sie *Huygens*, *Tschirnhausen*, *Johann Bernoulli*, *Leibniz* u. a. verdankt. Die Betrachtung des Strahlenbüschels eines Punktes der Ebene und des Ebenenbüschels einer Geraden im Raum ist von *Desargues* 1639 eingeführt worden [5a]).

Die Verallgemeinerung der *Descartes'schen* Coordinatenmethode auf den Raum von drei Dimensionen erfolgte besonders durch *Schooten*, *Parent* und *Clairaut* [69]). *Parent* lieferte die Darstellung einer Oberfläche durch eine Gleichung zwischen den drei Coordinaten eines Raumpunktes, und *Clairaut* vervollkommnete in wesentlichster Weise diese Neuerung 1731 durch eine klassische Abhandlung über Raumkurven. Kaum dreissig Jahre später begründete *Euler* die analytische Theorie der Krümmung der Flächen und die Einteilung der Flächen nach Grundsätzen, welche den in der Ebene gebräuchlichen analog sind. Er gibt Transformationsformeln für Raumcoordinaten und eine Diskussion der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiter Ordnung, deren Einteilung er aufstellt. — Statt der *Euler'schen* Benennungen: »Elliptoid, elliptisch-hyperbolische, hyperbolisch-hyperbolische, elliptisch-parabolische, parabolisch-hyperbolische Fläche« haben sich durch *Biot* und *Lacroix* die jetzt gebräuchlichen Namen: »Ellipsoid, Hyperboloide, Paraboloide« eingebürgert [5a]).

Auch Einzeluntersuchungen sind erwähnenswert. *Wallis* betrachtete 1663 ebene Schnitte und lieferte die Kubatur eines Konoids mit horizontaler Richtebene, dessen Gerade eine

vertikale Leitgerade und einen vertikalen Leitkreis schneiden. Von *Wren* rührt eine Untersuchung des zweimanteligen Rotationshyperboloids her (1669), das er »Cylindroid« nannte. Das Gebiet der Raumkurven, von welchen den Griechen die gemeine Schraubenlinie des *Archytas* und die ihrer Entstehung nach der *Archimedischen* ebenen Spirale entsprechende sphärische Spirale bekannt waren, fand eine Erweiterung durch die Linie, welche den Meridianen einer Kugel unter gleichen Winkeln begegnet. *Nonius* hatte diese Kurve 1546 für uneben erkannt, *Snellius* 1624 ihr den Namen »Loxodromia sphaerica« gegeben. — Das Problem der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten einer Fläche, welches auf Raumkurven führt, die das 19. Jahrhundert »geodätische Linien« genannt hat, wurde von *Johann Bernoulli* 1698 gestellt und von ihm selbst erfolgreich in Angriff genommen. — In einer Arbeit von *Piot* über die Schraubenlinie aus dem Jahr 1724 findet sich zum ersten Mal der Ausdruck »Ligne à double courbure«, »Linie doppelter Krümmung« für »Raumkurve«. — *Meusnier* gab 1776 und 1780 Sätze über die Berührungsebenen von Regelflächen und über die Krümmung einer Fläche in einem ihrer Punkte als Vorbereitung der nicht lange nachher beginnenden mächtigen Entwicklung der Flächentheorie[5a]).

Noch sind einige kleinere Untersuchungen in diesem Zeitraum zu erwähnen. Der algebraische Ausdruck für den Abstand der Mittelpunkte des umbeschriebenen und einbeschriebenen Kreises eines Dreiecks wird von *William Chapple* (1746), nach ihm von *Landen* (1755) und *Euler* (1765) bestimmt*). — *Meister* berechnet 1769 die Flächen von Polygonen, deren von je zwei benachbarten Ecken abgegrenzte Seiten einander durchsetzen, so dass der Umfang eine gewisse Zahl von Doppelpunkten aufzuweisen hat und das Vieleck in

---

*) Fortschritte 1887, S. 32.

Zellen mit einfachen oder vielfachen positiven oder negativen Flächen zerfällt. Ueber die Flächen derartiger singulärer Polygone hat später *Möbius* 1827 und 1865 Untersuchungen angestellt [5a]). — *Saurin* betrachtet die Tangenten in den vielfachen Punkten einer Kurve, und *Ceva*, von statischen Sätzen ausgehend, Transversalen an geometrischen Figuren. *Stewart* dehnt *Ceva's* Sätze weiter aus, während *Cotes* das harmonische Mittel der von einem festen Punkt aus gerechneten Abschnitte einer Sekante zu einer Kurve $n$ter Ordnung berechnet. Auch *Carnot* bereichert die Transversalentheorie. *Lhuilier* löst die Aufgabe, in einen Kreis ein n-Eck zu beschreiben, dessen Seiten durch n gegebene Punkte gehen. Von *Brianchon* stammt der Satz über das Tangentensechsseit eines Kegelschnitts, welcher dem *Pascal'schen* über das Sehnensechseck dualistisch beigeordnet ist. Die Uebertragung dieser beiden Sätze auf die Kugeloberfläche erfolgte durch *Hesse* und *Thieme*. Bei *Hesse* wird ein *Pascal'sches* Sechseck auf der Kugel durch sechs Punkte gebildet, die auf dem Schnitt der Kugel mit einer Kegelfläche zweiter Ordnung liegen, wobei die Spitze des Kegels in den Kugelmittelpunkt fällt. *Thieme* wählt einen geraden Kreiskegel. — Der für die elementare Schulgeometrie bestimmte Uebungsstoff hat unter anderem eine Vermehrung durch zahlreiche Sätze über den nach *K. W. Feuerbach* (1822) genannten Kreis, über Gegenmittellinien des Dreiecks, über den *Grebe'schen* Punkt und die *Brocard'schen* Gebilde (zum Teil schon von *Crelle* 1816 entdeckt, von *Brocard* 1875 neu wieder eingeführt) erfahren [68]).

Die Theorie der regulären geometrischen Gebilde erhielt ihre wichtigste Erweiterung durch *Gauss*, welcher merkwürdige Sätze über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit elementarer Konstruktionen von regelmässigen Vielecken entdeckte (s. S. 123). *Poinsot* bearbeitete die Lehre von den regelmässigen Polyëdern, indem er Betrachtungen über die fünf platonischen Körper anstellte, und besonders über die vier

»*Keppler-Poinsot'schen* regulären Körper höherer Art«, nemlich die vier Sternpolyëder, welche zu je zweien aus dem Dodekaëder und Ikosaëder entspringen. Die Fortsetzung dieser Betrachtungen erfolgte durch *Wiener*, *Hessel* und *Hess* unter Aufhebung gewisser beschränkender Voraussetzungen, so dass eine ganze Reihe von Körpern, welche in weiterem Sinn als regelmässig gelten können, den oben genannten sich angliedern lässt. — Entsprechende Studien für den vierdimensionalen Raum sind von *Scheffler*, *Rudel*, *Stringham*, *Hoppe*, *Schlegel* angestellt worden. Sie haben ergeben, dass in einem solchen Raum sechs regelmässige Gebilde existieren, von denen das einfachste als Begrenzung fünf Tetraëder aufzuweisen hat. Die Umgrenzung der übrigen fünf Gebilde erfordert beziehungsweise 16 oder 600 Tetraëder, 8 Hexaëder, 24 Oktaëder, 120 Dodekaëder[95]). — Noch mag erwähnt sein, dass im Jahr 1849 durch *E. F. August* das Prismatoid in die Stereometrie eingeführt wurde, und dass *Schubert* und *Stoll* das *Apollonische* Berührungsproblem so verallgemeinerten, dass sie die Konstruktion der sechzehn Berührungskugeln zu vier gegebenen Kugeln anzugeben vermochten.

Die projektive Geometrie, wohl auch weniger bezeichnend neuere Geometrie oder Geometrie der Lage genannt, ist im wesentlichen eine Schöpfung des 19. Jahrhunderts. Die *Descartes'sche* analytische Geometrie hatte im Verein mit der von *Leibniz* und *Newton* geschaffenen höheren Analysis eine Reihe wichtiger Entdeckungen im Gebiet der Raumlehre zu verzeichnen gehabt; allein sie war nicht dazu angethan, für rein geometrische Sätze einen befriedigenden Beweis zu führen. Beziehungen spezifisch geometrischer Art hatten sich aber namentlich im konstruktiven Zeichnen auffinden lassen. Auch *Newton's* Aufstellung seiner fünf Haupttypen von Kurven dritter Ordnung, als deren Projektion die vierundsechzig übrigen Typen aufgefasst werden können,

hatte einen Anstoss nach derselben Richtung hin gegeben. Nach wichtigeren Vorarbeiten von *Carnot* erfolgte die Entwicklung der neuen Disciplin durch *Poncelet, Chasles, Steiner* und *v. Staudt*; sie entdeckten »die überströmende Quelle tiefer und eleganter Sätze, die sich mit überraschender Leichtigkeit zu einem organischen Ganzen vereinigten, zu dem graziösen Aufbau der projektiven Geometrie, die insbesondere hinsichtlich der Theorie der Kurven zweiter Ordnung als das Ideal eines wissenschaftlichen Organismus gelten kann«[13]).

Ihre früheste Entfaltung fand die projektive Geometrie auf französischem Boden durch die »Géométrie descriptive« von *Monge*, dessen erstaunliche Vorstellungskraft, unterstützt von den Methoden der darstellenden Geometrie, eine Menge zur Klassifikation der Raumgebilde verwendbare Eigenschaften der Flächen und Kurven entdeckte. Sein Werk schuf »für die geometrische Wissenschaft den bis dahin unbekannten Begriff der geometrischen Allgemeinheit und der geometrischen Eleganz«[48]), und die Bedeutung seiner Arbeiten ist nicht nur für die Lehre von der Projektivität, sondern auch für die Entwicklung der Theorie der Krümmung von Flächen eine fundamentale geworden. Zur Einführung des Imaginären in die Betrachtungen der reinen Geometrie hat *Monge* ebenfalls den Anstoss gegeben, und sein Schüler *Gaultier* hat diese Untersuchungen weitergeführt, indem er z. B. die Potenzlinie zweier Kreise als Sekante derselben durch ihre reellen oder imaginären Schnittpunkte definierte.

Die so erzielten Resultate der Schule *Monge's*, welche stets der reinen Geometrie näher verwandt waren als der *Descartes'schen* analytischen Geometrie, bestanden vornehmlich in einer Reihe neuer interessanter Sätze über Flächen zweiter Ordnung, gehörten also demjenigen Gebiet an, in das vor *Monge* schon *Wren* (1669), *Parent* und *Euler* eingetreten waren. — Dass *Monge* die analytischen Methoden nicht gering schätzte, davon zeugt seine »Application de l'Algèbre à la

géométrie« (1805), durch welche er, wie *Plücker* sagt, »die Gleichung der geraden Linie in die analytische Geometrie einführte, dadurch den Grund zur Verbannung aller Konstruktion aus derselben legte und ihr jene neue Form gab, durch welche ihre weitere Ausbildung möglich wurde«.

Während *Monge* sich bei seinen Arbeiten mit Vorliebe im Raum von drei Dimensionen bewegte, studierte *Carnot* insbesondere die Grössenverhältnisse an Figuren mit Transversalenschnitten, und gründete durch Einführung des Negativen eine »Géométrie de position«, welche aber nicht identisch ist mit dem, was heute »Geometrie der Lage« genannt wird. Nicht die bedeutendste, aber für die elementare Schulgeometrie bemerkenswerteste Darlegung *Carnot's* ist die über das vollständige Viereck und Vierseit.

Monge und *Carnot* hatten die Hindernisse, welche sich einer naturgemässen Entwicklung der Geometrie auf ihrem eigenen Felde entgegenstellten, beiseite geräumt, und nun konnten neue Ideen in wohl vorbereitetem Boden einer raschen Entwicklung sicher sein. Die Saat ging von *Poncelet* aus. Sein im Jahr 1822 erschienenes Werk: »Traité des propriétés projectives des figures« untersucht die Eigenschaften der Figuren, welche bei einer Projektion derselben unverändert bleiben, d. h. ihre invarianten Eigenschaften. Die Projektion geschieht hier nicht, wie bei *Monge*, durch parallele Strahlen einer vorgeschriebenen Richtung, sondern durch Zentralprojektion, also nach Art der Perspektive. Dadurch kam *Poncelet* zur Einführung der perspektivischen Axe und des perspektivischen Mittelpunkts (nach *Chasles* Axe und Zentrum der Homologie) in die Betrachtung ebener Figuren, nachdem schon *Desargues* die Fundamentalsätze hiefür aufgestellt hatte. Schon 1811 waren durch *Servois* der Ausdruck »Pol einer Geraden«, durch *Gergonne* 1813 die Benennungen »Polare eines Punktes« und »Dualität« gebraucht worden; aber *Poncelet* entwickelte 1818 einige Bemerkungen *De Lahire's* vom

13*

Jahr 1685 über das gegenseitige Entsprechen von Pol und Polare bei Kegelschnitten zu einer Methode, welche Figuren in ihre polar reciproken überführte. *Gergonne* erkannte in dieser Theorie der reciproken Polaren ein Prinzip, dessen Anfänge schon dem *Viète*, *Lansberg* und *Snellius* aus der sphärischen Geometrie bekannt waren; er nannte es das Prinzip der Dualität (1826). *Gergonne* stellte auch 1827 dem Begriff der Ordnung einer ebenen algebraischen Kurve denjenigen der Klasse dualistisch gegenüber; die Linie ist $n$ter Ordnung, wenn sie von einer Geraden der Ebene in n Punkten getroffen wird, und sie ist $n$ter Klasse, wenn von einem Punkt der Ebene n Tangenten an sie gezogen werden können[5a]).

Während im weiteren Verlauf in Frankreich nur *Chasles* sich in eingehender Weise der Fortführung der neuen Disziplin annahm, ging die reichste Entwicklung derselben vom dritten Dezennium des 19. Jahrhunderts ab auf deutschem Boden vor sich, wo fast gleichzeitig die drei grossen Forscher *Möbius*, *Plücker* und *Steiner* auf den Plan traten. Und von dieser Zeit ab scheidet sich auch[13]) die durch *Steiner*, *v. Staudt* und *Möbius* vertretene synthetische, mehr konstruierende Richtung von der durch *Plücker*, *Hesse*, *Aronhold* und *Clebsch* besonders entwickelten analytischen Seite der neueren Geometrie.

Der »barycentrische Calcul« brachte im Jahr 1827 das erste Beispiel homogener Coordinaten und damit eine bis dahin in der analytischen Geometrie unbekannte Symmetrie der entwickelten Formeln. *Möbius* ging in diesem Calcul davon aus, dass man jeden Punkt P in der Ebene eines Dreiecks ABC als Schwerpunkt des letzteren ansehen kann; dabei gehören den Punkten A, B, C entsprechende Gewichte zu, welche nichts anderes sind, als die homogenen Coordinaten des Punktes P in Bezug auf die Ecken des Fundamentaldreiecks ABC. Durch diesen Algorithmus fand *Möbius* auf dem Wege

der Rechnung eine Menge geometrischer Sätze, namentlich solche, die invariante Eigenschaften ausdrücken, wie die Sätze über Doppelschnitts- und Dreiecksschnittsverhältnisse. Die analytisch gefundenen Sätze suchte *Möbius* auch geometrisch zu beweisen, und zu diesem Zweck führte er mit aller Konsequenz das »Prinzip der Zeichen« durch, welches ausdrückt, dass für A, B, C als Punkte einer Geraden $AB = -BA$, $AB + BA = 0$, $AB + BC + CA = 0$ ist.

Unabhängig von *Möbius*, aber von denselben Prinzipien ausgehend, kam *Bellavitis* zu seiner neuen geometrischen Methode der Aequipollenzen*). Zwei gleiche und gleichgerichtete parallele Strecken AB und CD heissen äquipollent (nach der Bezeichnung von *Cayley* $AB \equiv CD$). Durch diese Annahme wird die ganze Theorie auf die Betrachtung von Strecken, welche von einem festen Punkt ausgehen, zurückgeführt. Ferner wird verlangt, dass $AB + BC \equiv AC$ sei (Addition). Endlich soll für die Strecken a, b, c, d und deren Neigungen α, β, γ, δ gegen eine feste Axe die Gleichung $a \equiv bc:d$ nicht nur eine Beziehung zwischen Längen sein, sondern auch anzeigen, dass $\alpha = \beta + \gamma - \delta$ ist (Proportion). Für $d = 1$ und $\alpha = 0$ wird dann $a \equiv bc$, d. h. das Produkt der absoluten Werte für die Längen ist $a = bc$, und zugleich ist $\alpha = \beta + \gamma$ (Multiplikation). — Die Aequipollenz ist demnach nur ein besonderer Fall der Gleichheit zweier Objekte, vollzogen an Strecken [108]).

Möbius führte ferner die Betrachtung der ein- und mehrdeutigen Verwandtschaft zweier geometrischen Gebilde ein. Die eindeutige Verwandtschaft, bei welcher je einem Punkt eines ersten Gebildes nur stets ein Punkt eines zweiten Gebildes entspricht, und einem Punkt des zweiten wieder nur ein Punkt des ersten, nannte *Möbius* Collineation; er konstruierte sich nicht bloss ein collineares Abbild der Ebene, sondern auch des gewöhnlichen Raums.

Die neuen und fundamentalen Gedanken, welche *Möbius*

---

*) Bellavitis, Saggio di Applicazioni di un Nuovo Metodo di Geometria Analitica (Calculo delle Equipollenze). Ann. Lomb. Veneto, t. 5. 1835.

im barycentrischen Calcul niedergelegt hatte, blieben lange Zeit fast ganz unbeachtet und griffen deshalb nicht sofort in die Gestaltung der geometrischen Anschauungen ein. Günstigeren Boden fanden die Arbeiten *Plücker's* und *Steiner's*. Letzterer »hatte in der unmittelbaren geometrischen Anschauung das hinreichende Hilfsmittel und den einzigen Gegenstand seiner Erkenntnis erblickt, während *Plücker* in der Identität der analytischen Operation und der geometrischen Konstruktion die Quelle seiner Beweise suchte und geometrische Wahrheit nur als eins der vielen denkbaren Gegenbilder analytischer Beziehung betrachtete«[20]).

In späterer Zeit (1855) beschäftigte sich *Möbius* auch mit Involutionen höheren Grads; eine solche $m$ten Grads besteht aus zwei Gruppen von je m Punkten: A_1, A_2, A_3, ... A_m; B_1, B_2, B_3, ... B_m, welche zwei Figuren so bilden, dass dem 1ten, 2ten, 3ten, ... $m$ten Punkt einer Gruppe als Punkten der ersten Figur der Reihe nach der 2te, 3te, 4te, ... 1te Punkt derselben Gruppe als Punkte der zweiten Figur mit derselben bestimmten Verwandtschaft entsprechen. — Die Involutionen höheren Grads hatte vor *Möbius* schon *Poncelet* (1843) betrachtet, ausgehend von dem durch *Sturm* 1826 bekannt gegebenen Satz, dass durch die Kegelschnitte der Flächen zweiter Ordnung $u = 0$, $v = 0$, $u + \lambda v = 0$ auf einer Geraden sechs Punkte A, A', B, B', C, C' in Involution bestimmt werden, d. h. so, dass in den Systemen $ABCA'B'C'$ und $A'B'C'ABC$ je A und A', B und B', C und C', aber auch A' und A, B' und B, C' und C entsprechende Punktpaare sind. Dieses wechselseitige Entsprechen dreier Punktpaare einer Linie hat *Desargues* schon 1639 mit dem Namen »Involution« bezeichnet[5a]).

Plücker ist der eigentliche Begründer der analytischen Richtung neueren Stils, und dies ist er dadurch geworden, dass er »das Prinzip der Dualität analytisch formulierte und

in seinen Konsequenzen verfolgte« [13]). Die »analytisch geometrischen Untersuchungen« erschienen 1828. Durch dieses Werk wurde die Methode der symbolischen Bezeichnung und der unbestimmten Coëfficienten für die Geometrie geschaffen, wodurch man von der Notwendigkeit befreit war, bei der Betrachtung der gegenseitigen Verhältnisse zweier Gebilde stets auf das Coordinatensystem Rücksicht nehmen zu müssen, so dass mit den Gebilden selbst operiert werden konnte. — Das »System der analytischen Geometrie« von 1835 bringt neben der ausgiebigen Anwendung der abgekürzten Bezeichnung eine vervollständigte Einteilung der ebenen Kurven dritter Ordnung; und in der »Theorie der algebraischen Kurven« von 1839 traten ausser einer Untersuchung über ebene Kurven vierter Ordnung jene analytischen Beziehungen zwischen den gewöhnlichen Singularitäten ebener Kurven auf, welche allgemein als »*Plücker'sche* Formeln« bekannt sind.

Diese *Plücker'schen* Formeln *), welche zunächst nur für ebene algebraische Kurven und deren vier sich paarweise dualistisch entsprechende Singularitäten (Rückkehrpunkt, Doppelpunkt, Wendetangente, Doppeltangente) Gültigkeit haben, sind von *Cayley* auf Kurven mit höheren Singularitäten ausgedehnt worden. Mit Hilfe von Reihenentwicklungen leitete er vier »Aequivalenzzahlen« ab, welche erkennen lassen, wie viele der elementaren Singularitäten von einem singulären Punkt höherer Ordnung absorbiert werden, und wie der Ausdruck für das Geschlecht der Kurve davon beeinflusst wird. Bestätigt, erweitert und in den Beweisen vervollkommnet wurden *Cayley's* Resultate durch Arbeiten von *Nöther*, *Zeuthen*, *Halphen* und *Smith*. Die aus der *Cayley'schen* Anschauungsweise entspringende fundamentale Frage, ob und

---

*) A. Brill, Ueber Singularitäten ebener algebraischer Kurven und eine neue Kurvenspecies, Mathem. Annalen XVI.

durch welche Konstantenänderungen aus einer Kurve mit höherer Singularität eine solche mit den entsprechenden elementaren Singularitäten hergestellt werden kann, für welche die *Plücker'schen* und die Geschlechtsformeln dieselben sind, hat durch *A. Brill* ihre endgültige Entscheidung gefunden.

Plücker's grösstes Verdienst bildet wohl die Einführung der Geraden als Raumelement. Das Prinzip der Dualität hatte dazu geführt, neben dem Punkt in der Ebene die Gerade, im Raum die Ebene als bestimmendes Element einzuführen. *Plücker* benützt auch im Raume die Gerade zur systematischen Erzeugung von geometrischen Gebilden. Seine ersten Arbeiten in dieser Richtung wurden 1865 der Königlichen Gesellschaft in London vorgelegt. Sie enthielten schon Sätze über Komplexe, Kongruenzen und Regelflächen mit einiger Andeutung der Beweisführung. Die weitere Ausführung erschien 1868 als »Neue Geometrie des Raums, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement«. Die linearen Komplexe hatte *Plücker* selbst noch behandelt; an der Vollendung der Theorie der Komplexe zweiten Grads verhinderte ihn der Tod. Die Weiterführung der Lehre von den Komplexen erfolgte besonders durch *F. Klein* [69]).

Die im letzten Werke *Plücker's* enthaltenen Resultate haben besonders auf den Unterschied der ebenen Geometrie und der Raumgeometrie ein helles Licht geworfen [18a]). Die krumme Linie der Ebene tritt entweder als einfach unendliches System von Punkten oder von Geraden auf; in dem Raum kann die Kurve als einfach unendliches System von Punkten, Geraden oder Ebenen betrachtet werden; aber von anderem Gesichtspunkt aus ist diese Raumkurve ersetzbar durch eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante sie ist; besondere Fälle der Raumkurve und der abwickelbaren Fläche sind die ebene Kurve und die Kegelfläche. Ein weiteres Raumgebilde, die allgemeine Fläche, ist einerseits ein zwei-

fach unendliches System von Punkten oder Ebenen, andererseits aber als spezieller Fall eines Komplexes ein dreifach unendliches System von Geraden, den Tangenten der Fläche; als besonderer Fall entsteht hier die windschiefe Fläche oder Regelfläche. Ausserdem tritt noch die Kongruenz als zweifach, der Komplex als dreifach unendliches System von Geraden auf. — Die Raumgeometrie umfasst eine Anzahl von Theorien, zu welchen die ebene Geometrie nichts analoges aufzuweisen hat. Dazu gehören die Beziehungen einer Raumkurve zu den Flächen, welche durch sie gelegt werden können, oder einer Fläche zu den auf ihr liegenden Linien doppelter Krümmung. Zu den Krümmungslinien einer Fläche bietet sich in der Ebene nichts entsprechendes dar; und der Betrachtung der Geraden als kürzester Verbindungslinie zweier Punkte der Ebene stehen im Raum zwei umfassende und schwierige Theorien gegenüber, jene der geodätischen Linie auf einer gegebenen Fläche, und jene der Minimalfläche zwischen gegebener Umgrenzung. Es ist besonders noch die Frage nach der analytischen Darstellung einer Raumkurve, welche Schwierigkeiten bietet, da ein solches Gebilde nur für den Fall, dass es der vollständige Schnitt zweier Flächen ist, durch zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y, z dargestellt werden kann. Gerade nach dieser Richtung hin gehen neuere Untersuchungen von *Nöther*, *Halphen* und *Valentiner*.

Vier Jahre nach den »analytisch geometrischen Untersuchungen« *Plücker's*, im Jahre 1832, trat *Steiner* mit der »systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten« vor die Oeffentlichkeit. Die ganze Lehre von den Kegelschnitten fand *Steiner* konzentriert in dem einzigen Satz (mit seinem dualistisch entsprechenden), dass eine Kurve zweiter Ordnung, als Schnitt zweier kollinearen oder projektivischen Büschel entsteht, und so wurde durch

ihn die Lehre von den Kurven und Flächen zweiter Ordnung im wesentlichen abgeschlossen, dafür aber die Aufmerksamkeit auf die algebraischen Kurven und Flächen höherer Ordnung gelenkt. Diesen Weg hat *Steiner* selbst mit Erfolg betreten; dafür spricht die »*Steiner'sche* Fläche«, dafür zeugt ein Aufsatz, welcher 1848 in den Berliner Abhandlungen erschien. In ihm wurde die Theorie der Polaren eines Punktes in Bezug auf eine krumme Linie eingehend behandelt, und dadurch eine mehr geometrische Theorie der ebenen Kurven ausgebildet, welche durch die Arbeiten von *Grassmann*, *Chasles*, *Jonquières*, *Cremona* ihre Weiterführung gefunden hat [69]).

Steiner und *Plücker* haben ihre Namen auch mit einem geometrischen Problem in Verbindung gebracht, das in seiner einfachsten Gestalt der Elementargeometrie angehört, aber mit seinen Verallgemeinerungen in höhere Gebiete eindringt. Es ist dies die *Malfatti'sche* Aufgabe [122]). *Malfatti* stellte 1803 folgendes Theorem: »Es soll ein gerades dreiseitiges Prisma drei cylindrische Aushöhlungen erhalten, so zwar, dass die drei Cylinder mit dem Prisma einerlei Höhe haben und deren Inhalte die grösstmöglichsten werden, die nach der Aushöhlung also übrig bleibende Masse ein Minimum werde.« Diese Aufgabe reduzierte er auf die jetzt allgemein als »*Malfatti'sches* Problem« bekannte Forderung, in ein gegebenes Dreieck drei Kreise so einzubeschreiben, dass jeder Kreis zwei Dreiecksseiten und die zwei andern Kreise berührt. Er berechnet die Halbmesser x_1, x_2, x_3 der gesuchten Kreise aus dem halben Umfang s des Dreiecks, dem Halbmesser ρ des einbeschriebenen Kreises, den Abständen a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 der Ecken des Dreiecks von dem Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises und dessen Berührungspunkten auf den Seiten, und findet

$$x_1 = \frac{\rho}{2b_1}(s + a_1 - \rho - a_2 - a_3),$$

$$x_2 = \frac{\rho}{2b_2}(s + a_2 - \rho - a_1 - a_3),$$

$$x_3 = \frac{\rho}{2b_3}(s + a_3 - \rho - a_1 - a_2),$$

ohne den Gang der Rechnung anzugeben; wohl aber fügt er eine

einfache Konstruktion bei. Mit der Lösung dieser Aufgabe beschäftigte sich auch *Steiner*. Er gab (ohne Beweis) eine Konstruktion, führte an, dass es zweiunddreissig Lösungen gebe, und verallgemeinerte das Problem, zunächst so, dass die drei Geraden durch drei Kreise ersetzt wurden. Dieselbe Verallgemeinerung betrachtete auch *Plücker*. Aber *Steiner* behandelte ausserdem die entsprechende Aufgabe für den Raum: zu dreien auf einer Fläche zweiter Ordnung gegebenen Kegelschnitten drei andere zu bestimmen, welche je zwei der gegebenen und der gesuchten Kurven berühren. Diese allgemeine Aufgabe wurde von *Schellbach* und *Cayley* analytisch, von *Clebsch* mit Hilfe des Additionsproblems der elliptischen Funktionen gelöst, während die einfachere Aufgabe in der Ebene von den verschiedensten Seiten in Angriff genommen wurde, so von *Gergonne, Lehmus, Crelle, Grunert, Scheffler, Schellbach* (der eine besonders elegante trigonometrische Lösung aufstellte) und *Zorer*. Der erste vollkommen gelungene Beweis der *Steiner'schen* Konstruktion rührt von *Binder**) her.

Nach *Steiner* sind es noch *v. Staudt* und *Chasles*, welche sich um die Entwicklung der projektiven Geometrie verdient gemacht haben. *Michel Chasles* veröffentlichte 1837 als »Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie« ein Werk, in welchem ältere und neuere Methoden zur Ableitung vieler interessanten Resultate Verwendung finden, von denen allerdings mehrere der wichtigsten, unter ihnen die Einführung des Doppelverhältnisses (*Chasles*' »anharmonisches Verhältnis«), der reciproken und collinearen Verwandtschaft (*Chasles*' »Dualität« und »Homographie«) teils auf *Steiner*, teils auf *Möbius* zurückgeleitet werden müssen.

Die »Geometrie der Lage« von *v. Staudt* erschien 1847, seine »Beiträge zur Geometrie der Lage« 1856—1860. Diese Schriften bilden einen gewissen Gegensatz zu denen von *Steiner* und *Chasles*, die stets mit metrischen Beziehungen und besonders mit Doppelverhältnissen arbeiten, während *v. Staudt* die Aufgabe zu lösen versucht, »die Geo-

*) Programm Schönthal 1868.

metrie der Lage zu einer selbständigen Wissenschaft zu machen, welche des Messens nicht bedarf«. Rein von Lagenverhältnissen ausgehend entwickelt *Staudt* alle Sätze, welche nicht unmittelbar von der Grösse geometrischer Gebilde handeln. *v. Staudt* hat namentlich die fundamentale Aufgabe der Einführung des Imaginären in die Geometrie vollständig gelöst. Die früheren Arbeiten von *Poncelet*, *Chasles* und anderen hatten allerdings komplexe Elemente benützt, aber dieselben nur in mehr oder minder unbestimmter Weise definiert, und namentlich komplex-konjugierte Elemente nicht von einander gesondert. *v. Staudt* bestimmt die komplexen Elemente als Doppelelemente involutorischer Verwandtschaften. Jedes Doppelelement wird durch den Sinn charakterisiert, in welchem man durch die Verwandtschaft von einem zum andern gelangt. — Auch diese *v. Staudt'sche* Anregung ist nicht sofort fürs allgemeine fruchtbar geworden, und erst späteren Arbeiten blieb es vorbehalten, sie dem grösseren Kreise durch Ausführung der ursprünglichen knappen Fassung zugänglicher zu machen.

In den »Beiträgen« etc. hat *v. Staudt* auch gezeigt, wie die Doppelverhältnisse von je vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe (die *v. Staudt'schen* »Würfe«) dazu benützt werden können, die absoluten Zahlen aus der reinen Geometrie abzuleiten [108]).

Mit der projektiven Geometrie ist die neuere darstellende Geometrie aufs engste verknüpft. Jene schöpfte während ihrer Entwicklung die ersten Kräfte aus Betrachtungen der Perspektive, — diese bereicherte sich später wieder durch Früchte, welche die Ausbildung der projektiven Geometrie gezeitigt hatte.

Die Perspektive der Renaissance [121]) fand ihre Förderung hauptsächlich durch französische Mathematiker, zunächst durch *Desargues*, der für die bildliche Darstellung von Objekten Coordinaten benutzte, und zwar so, dass zwei Axen in der Bildfläche lagen, während die dritte Axe eine

Normale der Bildebene war. Die Resultate *Desargues'* waren allerdings für die Theorie wichtiger als für die Praxis. — Mehr Erfolg hatte *Taylor* mit einer »linear perspektive« (1715). In derselben wird eine Gerade durch ihre Spur und den Verschwindungspunkt, eine Ebene durch Spur und Verschwindungsgerade bestimmt. Diese Art der Darstellung wurde durch *Lambert* zu verschiedenen Konstruktionen in sinnreicher Weise benützt, so dass in der Mitte des 18. Jahrhunderts räumliche Gebilde allgemeiner Lage schon perspektivisch abgebildet werden konnten.

Aus der Perspektive des 18. Jahrhunderts erwuchs die »darstellende Geometrie« zunächst durch ein Werk *Frézier's*, das ausser praktischen Anweisungen eine besondere theoretische Abteilung enthielt, versehen mit Beweisen für alle Fälle der betrachteten Darstellungsmethoden. Eben in der »description« oder Darstellung ersetzt *Frézier* die Zentralprojektion durch die senkrechte Parallelprojektion, »die man sich durch herabfallende Tropfen Tinte veranschaulichen soll« [121]). Das Bild der Projektionsebene heisst Grundriss oder Aufriss, je nachdem die Bildebene horizontale oder vertikale Stellung hat. Mit Hilfe dieser »description« stellt *Frézier* Ebenen, Polyeder, Flächen zweiten Grads, sowie Durchdringungen und Abwicklungen dar.

Seit *Monge* tritt die darstellende Geometrie als gesonderte Wissenschaft auf. Die »Leçons de géométrie descriptive« (1795) bilden die Grundpfeiler der darstellenden Geometrie, indem sie Horizontal- und Vertikalebene mit dem Grundschnitt einführen, Punkte und Gerade durch zwei Projektionen, Ebenen durch zwei Spuren darstellen lehren. Darauf folgt in den »Leçons« die Menge der Schnitt-, Berührungs- und Durchdringungsaufgaben, welche durch Kombinationen von Ebenen mit Polyedern und Flächen zweiter Ordnung entstehen. *Monge's* Nachfolger, *Lacroix*, *Hachette*, *Olivier* und *J. de la Gournerie*, machten Anwendungen dieser Methoden auf die

Flächen zweiter Ordnung, die Regelflächen und die Krümmungsverhältnisse von Kurven und Flächen.

Gerade zu der Zeit, als die Entwicklung der darstellenden Geometrie in Frankreich ihre ersten schönen Erfolge aufzuzählen hatte, entstanden die technischen Hochschulen. Im Jahr 1794 wurde in Paris die »Ecole centrale des travaux publics« gegründet, aus welcher 1795 die »Ecole polytechnique« hervorwuchs. Weitere technische Schulen, die im Lauf der Zeit zu Hochschulen sich erweiterten, errichtete man 1806 in Prag, 1815 in Wien, 1820 in Berlin, 1825 in Karlsruhe, 1827 in München, 1828 in Dresden, 1831 in Hannover, 1832 in Stuttgart, 1860 in Zürich, 1862 in Braunschweig, 1869 in Darmstadt, 1870 in Achen. In diesen Unterrichtsanstalten erfolgte in besonderer Weise die Ausnützung der Resultate projektiver Geometrie zur Förderung der darstellenden Geometrie, am konsequentesten durchgeführt von *Fiedler*, dessen Lehr- und Handbücher, teils Originale, teils Uebertragungen aus dem Englischen, in der geometrischen Litteratur eine hervorragende Stelle einnehmen.

Der technischen Bedeutung der darstellenden Geometrie hat sich seit Jahren auch eine künstlerische Seite organisch angegliedert, und diese ist es besonders, welche durch Arbeiten über Axonometrie (*Weisbach* 1844), Reliefperspektive, Photogrammetrie und Beleuchtungslehre eine Förderung zu verzeichnen hat.

Das zweite Viertel unseres Jahrhunderts ist die Zeit, wo formentheoretische Entwicklungen im Verein mit geometrischen Konstruktionen neue bedeutende Resultate entdecken liessen. Einerseits durch *Jacobi*, andererseits durch *Poncelet* und *Steiner* angeregt, behandelte *Hesse*[80]) (1837—1842) unter Anwendung der Transformation homogener Formen die Theorie der Flächen zweiten Grads, deren Hauptaxen er konstruierte. Von ihm wurden die Begriffe der »Polardreiecke« und »Polartetraëder«, der »Systeme konjugierter Punkte« aufgestellt, als geometrischer Ausdruck analytischer Beziehungen. Dazu kam die lineare Konstruktion des achten Schnittpunktes dreier Flächen zweiten Grads, wenn sieben derselben gegeben sind, ferner unter Benutzung *Steiner'scher* Sätze die lineare Kon-

struktion einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten. *Clebsch* ging, mit seinen Arbeiten an die englischen Geometer *Sylvester*, *Cayley*, *Salmon* anknüpfend, wesentlich weiter als *Hesse*. Seine grossartigen Leistungen in der Invariantentheorie, die Einführung des Begriffs des Geschlechts einer Kurve, die Anwendung der Theorie der elliptischen und *Abel'schen* Funktionen auf die Geometrie, auf das Studium der rationalen und elliptischen Kurven sichern ihm einen hervorragenden Platz unter denen, welche die Wissenschaft von der Ausdehnung gefördert haben. Als algebraisches Hilfsmittel benutzte *Clebsch* im Anschluss an *Hesse* mit Vorliebe den Satz über die Multiplikation von Determinanten in seiner Anwendung auf geränderte Determinanten. Seine Arbeiten [20]) über die allgemeine Theorie der algebraischen Kurven und Flächen begannen mit der Bestimmung derjenigen Punkte einer algebraischen Fläche, in welchen eine Gerade sie vierpunktig berührt; dieselbe Frage hatte auch *Salmon* behandelt, aber nicht in so übersichtlicher Weise. Während nun auf englischem Boden zur Theorie der Flächen dritter Ordnung mit ihrem System von siebenundzwanzig Geraden weitergeschritten wurde, unternahm es *Clebsch*, den Begriff des »Geschlechts« für die Geometrie fruchtbar zu machen. Dieser Begriff, dessen analytische Eigenschaften *Abel* nicht fremd waren, findet sich zuerst in *Riemann's* »Theorie der *Abel'schen* Funktionen« (1857). *Clebsch* spricht nun auch vom Geschlecht einer algebraischen Kurve $n$ter Ordnung mit d Doppel- und r Rückkehrpunkten, und bestimmt es als die Zahl $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r$. Zu einer durch ein bestimmtes p charakterisierten Klasse von ebenen oder räumlichen Kurven gehören alle diejenigen, welche sich durch eine eindeutige Transformation in einander überführen lassen, oder welche die Eigenschaft haben, dass je zwei unter ihnen sich Punkt für Punkt eindeutig entsprechen. Es besteht dann der Satz, dass nur diejenigen Kurven, welche dieselben $3p-3$

Parameter haben (für Kurven dritter Ordnung: denselben einen Parameter), rational in einander übergeführt werden können.

Die schwierige Theorie der Raumkurven[69]) verdankt ihre ersten allgemeinen Resultate *Cayley*, welcher Formeln aufstellte, die den *Plücker'schen* für ebene Kurven geltenden Gleichungen entsprechen. Ueber Raumkurven dritter und vierter Ordnung hatten *Möbius*, *Chasles*, *v. Staudt* Arbeiten geliefert. Allgemeine Betrachtungen über Raumkurven finden sich aus neuerer Zeit in Aufsätzen von *Nöther* und *Halphen*.

Die Grundlagen der abzählenden Geometrie[69]) finden sich in *Chasles*' »Methode der Charakteristiken« (1864). *Chasles* stellte für rationale Gebilde einer Dimension eine Korrespondenzformel auf, welche im einfachsten Fall folgenden Inhalt hat: Liegen zwei Punktreihen R_1 und R_2 auf einer Geraden so, dass jedem Punkt x von R_1 im ganzen α Punkte y in R_2 entsprechen, und wiederum jedem Punkt y von R_2 immer β Punkte x in R_1, so hat das aus R_1 und R_2 zusammengesetzte Gebilde $(\alpha + \beta)$ Coïncidenzen, oder es kommt $(\alpha + \beta)$ mal vor, dass ein Punkt x mit einem entsprechenden Punkt y zusammenfällt. — Das »*Chasles'sche* Korrespondenzprinzip« ist 1866 durch *Cayley* auf dem Weg der Induktion auf Punktsysteme einer Kurve höheren Geschlechts ausgedehnt, und diese Erweiterung von *Brill**) bewiesen worden. Wesentliche Ergänzungen dieser auf allgemeine algebraische Kurven sich beziehenden Abzählungsformeln (Korrespondenzformeln) sind von *Brill* und *Zeuthen* gegeben und durch Einführung des Geschlechts in eleganter Form dargestellt worden. Eine ausführliche Behandlung der Fundamentalaufgabe der abzählenden Geometrie, »zu bestimmen, wie viele geometrische Gebilde von gegebener Definition einer

---

*) Mathem. Annalen VI.

hinreichenden Zahl von Bedingungen genügen« enthält der »Kalkül der abzählenden Geometrie« von *H. Schubert* (1879).

Die einfachsten Fälle der eindeutigen Verwandtschaft oder eindeutigen Abbildung beziehen zwei zusammengefallene Ebenen auf einander; es sind dies die von *Poncelet* studierte Aehnlichkeit und die von *Möbius*, *Magnus* und *Chasles* behandelte Kollineation [69]). In beiden Fällen entspricht einem Punkt wieder ein Punkt, einer Geraden eine andere Gerade. Von diesen linearen Transformationen gingen *Poncelet*, *Plücker*, *Magnus*, *Steiner* zu den quadratischen über, indem sie zunächst eindeutige Verwandtschaften zwischen zwei getrennten Ebenen untersuchten, d. h. die eine Ebene eindeutig auf die andere abbildeten. Die »*Steiner'sche* Projektion« (1832) benützte zwei Ebenen E_1 und E_2, daneben zwei windschiefe Gerade g_1 und g_2. Zieht man nun durch einen Punkt P_1 oder P_2 von E_1 oder E_2 die Gerade X_1 oder X_2, welche sowohl g_1 als g_2 schneidet, und bestimmt den Schnittpunkt X_2 oder X_1 mit E_2 oder E_1, so sind P_1 und X_2, P_2 und X_1 entsprechende Punkte. Auf diese Weise entspricht jeder Geraden der einen Ebene ein Kegelschnitt in der andern. — *Plücker* hatte (1847) einen Punkt des einmanteligen Hyperboloids, ähnlich der Festlegung eines Punktes in der Ebene, durch die Abschnitte bestimmt, welche von ihm aus auf den zwei durch ihn gelegten Erzeugenden bis zu zwei festen Erzeugenden hin gemessen werden. Dies war ein Beispiel einer eindeutigen Abbildung einer Fläche zweiter Ordnung auf die Ebene.

Die eindeutige Beziehung einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung auf die Ebene untersuchte *Chasles* 1863, und diese Arbeit bezeichnet den Anfang der eigentlichen Theorie der Flächenabbildung, welche sofort ihre weitere Entwicklung fand, als *Clebsch* und *Cremona* unabhängig von einander die Abbildung der Flächen dritter Ordnung lieferten. *Cremona's* wichtige Resultate fanden Ergänzungen durch

Cayley, *Clebsch*, *Rosanes* und *Nöther*, welchem man den wichtigen Satz verdankt, dass jede »*Cremona'sche* Transformation«, die als solche hin und zurück eindeutig ist, durch Wiederholung einer Anzahl quadratischer Transformationen erzeugt werden kann. — Nur in der Ebene ist die Gesamtheit aller rationalen Umformungen oder *Cremona'schen* Transformationen bekannt; für den Raum ist erst ein Anfang zur Entwicklung dieser Theorie gemacht worden [57]).

Ein besonders wichtiger Fall eindeutiger Korrespondenz ist der einer konformen Abbildung einer Fläche auf die Ebene, weil hier Aehnlichkeit in den kleinsten Teilen zwischen Original und Bild stattfindet. Der einfachste Fall derselben, die stereographische Projektion, war schon *Hipparch* und *Ptolemäus* bekannt. Konform wird auch die Abbildung nach reciproken Radien, welche dadurch charakterisiert ist, dass stets zwei entsprechende Punkte P_1 und P_2 auf einem Strahl durch den festen Punkt O liegen, und zwar so, dass $OP_1 . OP_2 = \text{const.}$ ist; dadurch wird jede Kugel im Raum im allgemeinen wieder in eine Kugel übergeführt. Diese Transformation, von *Bellavitis* 1836 und *Stubbs* 1843 studiert, ist besonders zur Behandlung von Fragen der mathematischen Physik benutzt worden; *W. Thomson* nennt sie daher »das Prinzip der elektrischen Bilder«. Die Untersuchungen von *Lambert* und *Lagrange* über Abbildungen, vor allem aber die von *Gauss* führen zur Krümmungstheorie hinüber.

Ein weiteres Teilgebiet der Geometrie, die Differentialgeometrie (Theorie der Krümmung der Flächen), betrachtet im allgemeinen nicht zunächst die Fläche in ihrer Gesamtheit, sondern sie studiert die Eigenschaften derselben in der Umgebung eines gewöhnlichen Flächenpunktes und sucht

sie mit Hilfe der Differentialrechnung durch analytische Formeln zu charakterisieren.

Die ersten Versuche, in dieses Gebiet einzudringen, rühren von *Lagrange* (1761), *Euler* (1766) und *Meunier* (1776) her. Ersterer hatte die Differentialgleichung der Minimalflächen aufgestellt, die beiden letzteren fanden Sätze über Krümmungsradien und Zentraflächen. Aber von grundlegender Bedeutung für dieses an merkwürdigen Entdeckungen reiches Gebiet sind die Untersuchungen von *Monge*, *Dupin* und besonders die von *Gauss* geworden. In der »Application de l'Analyse à la Géométrie« (1795) behandelt *Monge* Flächenfamilien (Cylinderflächen, Kegel- und Umdrehungsflächen, Enveloppen mit den neuen Begriffen der Charakteristik und der Rückkehrkurve) und stellt als bezeichnend für sie partielle Differentialgleichungen auf. — Im Jahr 1813 erschienen die »Développements de Géométrie« von *Dupin*; sie enthielten die Aufstellung der Indicatrix eines Flächenpunkts, sowie Ausführungen über die von *Monge* eingeführten Krümmungslinien und die Asymptotenkurven.

Gauss widmete der Differentialgeometrie drei Abhandlungen; die berühmteste derselben (»Disquisitiones generales circa superficies curvas«) erschien 1827; die beiden andern (»Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie) wurden 1843 und 1846 veröffentlicht. In den »Disquisitiones etc.«, zu deren Ausführung *Gauss* die Anregung nicht bei *Monge*, sondern in seinen astronomischen und geodätischen Untersuchungen gefunden hatte [13]), wird die sphärische Abbildung einer Fläche eingeführt. Die eindeutige Beziehung zwischen der Fläche und einer Kugel wird dadurch hergestellt, dass als entsprechende Punkte die Fusspunkte paralleler Normalen gelten, wobei man sich freilich meist auf einen Teil der gegebenen Fläche zu beschränken hat, wenn die Eindeutigkeit erhalten bleiben soll. — Darauf folgt die Ein-

führung der krummlinigen Coordinaten einer Fläche und die Aufstellung des Krümmungsmasses als reciproker Wert des Produkts der beiden Hauptkrümmungshalbmesser in dem betreffenden Punkt. Das Krümmungsmass wird erst in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten, dann aber auch in krummlinigen Coordinaten der Fläche aufgestellt. Von letzterem Ausdruck wird gezeigt, dass er sich bei einer Verbiegung der Fläche ohne Dehnung und Faltung nicht ändert (dass er eine Biegungsinvariante ist). Hieran reiht sich die Betrachtung der geodätischen Linien, und die Berechnung der totalen Krümmung in einem Flächenpunkt und des Excesses eines aus geodätischen Linien gebildeten Dreiecks (Curvatura integra, Totalkrümmung).

Die grossen Gesichtspunkte der »Disquisitiones etc.« von 1827 haben nach den verschiedensten Seiten hin fruchtbringende Anregungen ausgesandt. *Jacobi* bestimmte die geodätischen Linien des dreiaxigen Ellipsoids. Mit Hilfe der elliptischen Coordinaten (der Parameter von drei durch den zu bestimmenden Punkt gelegten Flächen eines orthogonalen Systems von Flächen zweiter Ordnung) gelang ihm die Integration der partiellen Differentialgleichung, so dass die Gleichung der geodätischen Linie als Relation zwischen zwei *Abel'schen* Integralen auftrat. Die Eigenschaften der geodätischen Linien des Ellipsoids lassen sich besonders leicht aus den eleganten Formen ablesen, welche *Liouville* gegeben hat. — Durch *Lamé* wurde die Theorie der krummlinigen Coordinaten, nachdem er schon 1837 einen Spezialfall behandelt hatte, 1859 zu einer Theorie für den Raum ausgebildet in den »Leçons sur la théorie des coordonnées courvilignes«.

Der Ausdruck für das *Gauss'sche* Krümmungsmass als Funktion krummliniger Coordinaten hat den Anstoss zum Studium von sogenannten Differential-Invarianten oder Differential-Parametern gegeben. Es sind dies gewisse Ausdrücke

der partiellen Ableitungen von einer oder mehreren Funktionen, welche sich bei der Transformation der Variabeln ähnlich verhalten wie die Invarianten der modernen Algebra. Vorbereitend haben hier *Saucé*, *Jacobi*, *C. Neumann*, *Halphen* eingegriffen; eine allgemeine Theorie hat *Beltrami* *) geschaffen. Diese Lehre, sowie die der Berührungstransformationen von *Lie*, bewegt sich im Grenzgebiet zwischen der Geometrie und der Lehre von den Differentialgleichungen [69]).

An Probleme der mathematischen Theorie des Lichts schliessen sich gewisse Untersuchungen über Strahlensysteme und über die Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel an, wie sie zunächst *Dupin*, *Malus*, *Ch. Sturm*, *Bertrand*, *Transon*, *Hamilton* ausführten. Die berühmten Arbeiten *Kummer's* (1857 und 1866) vervollständigen *Hamilton's* Resultate über Strahlenbündel und betrachteten die Zahl der Singularitäten eines Strahlensystems und seiner Brennfläche. Eine interessante Anwendung zur Untersuchung des Strahlenbündels zwischen der Linse und der Netzhaut, gegründet auf die Betrachtung der unendlich dünnen Normalenbündel von Ellipsoiden, gab *O. Böklen* **).

Nichteuklidische Geometrie. So unbegrenzt auch die Verehrung war, welche Jahrhundert um Jahrhundert den »Elementen« *Euklid's* gezollt — eine verwundbare Stelle hatte geometrischer Scharfsinn doch entdeckt; und diese Stelle [69]) bildet das elfte Axiom (nach *Hankel* von *Euklid* selbst zu den Postulaten gerechnet), welches aussagt, dass zwei Gerade sich auf der Seite schneiden, auf welcher die Summe der inneren Gegenwinkel kleiner als zwei Rechte ist. Gegen Ende des vorigen Jahrhunderts hatte *Legendre* versucht, dieses Axiom dadurch zu beseitigen, dass er es aus den übrigen zu beweisen trachtete; seine Schlussfolgerungen erwiesen sich aber als nicht einwurfsfrei. Diese Anstrengung

*) Mem. di Bologna; VIII.

**) Kronecker's Journal, Band 46. Fortschr. 1884.

Legendre's war ein Anzeichen von dem nunmehr beginnenden Suchen nach einer in sich widerspruchsfreien Geometrie — nach einer Hyper-Euklidischen oder Pangeometrie. Auch hier war unzweifelhaft *Gauss* der erste, der erkannte, dass jenes Axiom nicht bewiesen werden könne. Obwohl aus seinem Briefwechsel mit *Wolfgang Bolyai* und *Schumacher* deutlich zu ersehen ist, dass er auf diesem Gebiete schon frühzeitig bestimmte Resultate erzielt hatte, konnte er sich zu keinen Veröffentlichungen hierüber entschliessen. Die eigentlichen Bahnbrecher für die Nichteuklidische Geometrie wurden *Lobatschewsky* und die beiden *Bolyai*. Die Berichte über die Forschungen *Lobatschewsky's* erschienen zuerst im Kurier von Kasan 1829—30, dann in den Abhandlungen der Universität Kasan 1835—1839, endlich als »Geometrische Untersuchungen über die Theorie der Parallellinien« 1840 in Berlin. Von *Wolfgang Bolyai* [96]) wurde 1832—1833 über denselben Gegenstand ein zweibändiges Werk herausgegeben: »Tentamen Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae etc.« Beide Schriften waren für die mathematische Welt lange Zeit so gut wie nicht vorhanden, bis im Jahr 1866 *R. Baltzer* in seinen »Elementen« auf *Bolyai* hinwies. Fast gleichzeitig erfolgte ein plötzlicher mächtiger Vorstoss zur Erforschung der »neuen Welt« durch *Riemann*, *Helmholtz* und *Beltrami*. Man erkannte [11]), dass von den zwölf euklidischen Axiomen neun wesentlich arithmetischen Inhalts sind, also für jede Art von Geometrie Geltung besitzen; jeder Geometrie angehörig ist auch das zehnte Axiom über die Gleichheit aller rechten Winkel. Das zwölfte Axiom (zwei Gerade oder allgemeiner zwei geodätische Linien schliessen keinen Raum ein) gilt n i c h t für die Geometrie auf der Kugel, das elfte Axiom (zwei Gerade, geodätische Linien, schneiden sich, wenn die Summe der korrespondierenden Gegenwinkel kleiner als $2R$ ist) gilt in dieser Fassung n i c h t allgemein für die Geometrie auf einer Pseudosphäre, sondern nur für die in der Ebene.

Riemann sucht in der Schrift: »Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen«*), in die Frage einzudringen, indem er den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse formt; und nach diesen Untersuchungen sind die wesentlichen Kennzeichen einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit die folgenden:

1. »Jeder Punkt in derselben lässt sich durch n veränderliche Grössen (Coordinaten) bestimmen.

2. Die Länge einer Linie ist unabhängig von Ort und Richtung, so dass jede Linie durch jede andere messbar ist.

3. Um die Massverhältnisse in einer solchen Mannigfaltigkeit zu untersuchen, ist für jeden Punkt das von ihm ausgehende Linienelement darzustellen durch die entsprechenden Differentialien der Coordinaten. Dies geschieht vermittelst der Hypothese, dass das Längenelement der Linie gleich sei der Quadratwurzel aus einer homogenen Funktion zweiten Grads von den Differentialien der Coordinaten.«

Gleichzeitig veröffentlichte *Helmholtz* **) in den »Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen«, folgende Postulate:

1. »Ein Punkt einer n-fachen Mannigfaltigkeit ist durch n Coordinaten bestimmt.

2. Zwischen den $2n$ Coordinaten eines Punktepaares besteht eine von der Bewegung des letzteren unabhängige Gleichung, welche für alle kongruenten Punktepaare dieselbe ist.

3. Es wird vollkommen freie Beweglichkeit der festen Körper vorausgesetzt.

4. Wenn ein fester Körper von n Dimensionen sich um $n-1$ feste Punkte dreht, so führt die Drehung ohne Umkehr in die Anfangslage zurück.«

---

*) Göttinger Abhandlungen, XIII; 1868. Fortschritte 1868.

**) Fortschritte 1868.

Die gewöhnliche Geometrie hat hierin die genügenden Grundlagen einer widerspruchsfreien Entwicklung, wenn sie noch hinzufügt, dass der Raum drei Dimensionen hat und ~~unendlich~~ ausgedehnt ist.
unbegrenzt

Eines der überraschendsten Resultate neuerer geometrischer Forschung war der Nachweis der Gültigkeit der Nichteuklidischen Geometrie auf den Pseudosphären oder Flächen von konstanter negativer Krümmung [18a]). Auf einer Pseudosphäre gilt beispielsweise, dass eine geodätische Linie (der Geraden in der Ebene, dem Grosskreis auf der Kugel entsprechend) zwei von einander verschiedene unendlich ferne Punkte hat, dass es durch einen Punkt P zu einer gegebenen geodätischen Linie g zwei parallele geodätische Linien gibt, von denen aber nur je ein in P beginnender Zweig die g im Unendlichen schneidet, während der andere Zweig der g gar nicht begegnet; dass die Summe der Winkel eines geodätischen Dreiecks kleiner als zwei Rechte ist. Damit ist eine Geometrie auf der Pseudosphäre gegeben, welche mit der sphärischen Geometrie in der gewöhnlichen oder euklidischen Geometrie zusammengrenzt. Diese drei Geometrien haben gemeinsam, dass sie für Flächen von konstanter Krümmung gelten; je nachdem der konstante Wert der Krümmung positiv, Null oder negativ ist, handelt es sich um die sphärische, Euklidische oder pseudosphärische Geometrie.

Eine neue Darstellung derselben Theorie verdankt man *F. Klein.* Nachdem die projektive Geometrie gezeigt hatte, dass bei der Projektion oder linearen Transformation alle Lageneigenschaften und auch einige metrische Beziehungen der Gebilde erhalten bleiben, war man bestrebt, für die metrischen Eigenschaften einen Ausdruck zu finden, der einer linearen Transformation gegenüber sich invariant verhalten würde. Nach einer vorbereitenden Arbeit von *Laguerre*,

der den »Begriff des Winkels projektiv« machte, fand *Cayley* 1859 die allgemeine Lösung dieser Frage, indem er »jede metrische Eigenschaft einer ebenen Figur als in einer projektiven Beziehung zwischen dieser und einem festen Kegelschnitt enthalten« betrachtete. *Klein* gelang es, über die *Cayley'sche* Theorie hinausgehend auf Grund der Betrachtung der Massbestimmung im Raum zu zeigen, dass aus der projektiven Geometrie mit spezieller Massbestimmung in der Ebene eine elliptische, parabolische und hyperbolische Geometrie gefolgert werden können*), welche im Grunde dasselbe sind wie die sphärische, Euklidische und pseudosphärische Geometrie.

Das Bedürfnis nach möglichster Verallgemeinerung und die stete Vervollkommnung des analytischen Apparats hat zu Versuchen geführt, eine Geometrie von n Dimensionen aufzubauen; jedoch sind vorläufig nur einzelne Beziehungen betrachtet worden. Von *Lagrange* [69]) rührt die Bemerkung her, »dass man die Mechanik als eine Geometrie von vier Dimensionen ansehen könne«. *Plücker* suchte den Begriff des beliebig ausgedehnten Raums in ein anschauliches Gewand zu kleiden; er wies darauf hin, dass für den Punkt, die Gerade oder die Kugel, die Fläche zweiter Ordnung als Raumelement, der gewählte Raum bezüglich drei, vier oder neun Dimensionen haben müsse. Die erste Untersuchung[57]), welche eine andere Auffassung als die *Plücker'sche* gibt, und »das Element der beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit als ein Analogon zum Punkt des Raums betrachtet«, gab *H. Grassmann* in seinem Hauptwerk: »Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die lineale Ausdehnungslehre« (1844), das aber fast ganz unbeachtet blieb, ebenso wie seine »geometrische Analyse« (1847). Dann folgten aber *Riemann's*

*) Fortschritte 1871.

Untersuchungen über mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten in der Schrift: »Ueber die Hypothesen etc.« und sie bildeten wieder den Ausgangspunkt für eine Reihe neuerer Arbeiten.

Eine »Geometria situs« im weiteren Sinn hat *Gauss* dem Namen nach wenigstens geschaffen; man kennt von ihr jedoch kaum viel mehr als einzelne experimentelle Wahrheiten [13]). Die von *Riemann* angeregte »Analysis situs« sucht das Bleibende zu bestimmen gegenüber von Transformationen, die durch Zusammensetzung aus unendlich kleinen Verzerrungen entstehen [57]). Sie dient zur Lösung von Aufgaben der Funktionentheorie. — Durch *Lie* sind die allerdings schon von *Jacobi* betrachteten Berührungstransformationen ausgebildet worden. Eine Berührungstransformation ist analytisch durch jede Substitution definiert, welche die Werte der Coordinaten x, y, z und der partiellen Differentialquotienten $dz : dx = p$, $dz : dy = q$ durch Grössen derselben Art x', y', z', p', q' ausdrückt. Bei einer derartigen Transformation gehen Berührungen zweier Gebilde wieder in solche über [57]). — Auch eine »geometrische Wahrscheinlichkeitslehre« ist durch *Sylvester* und *Woolhouse* geschaffen worden*); *Crofton* benützt sie für die Theorie von willkürlich im Raum gezogenen Geraden.

In einer Geschichte der elementaren Mathematik hat auch wohl ein Seitengebiet Anspruch auf Berücksichtigung, welches freilich als eigentlicher Wissenszweig nicht gelten kann, aber doch bis zu einem gewissen Grade die Entwicklung der geometrischen Wissenschaft widerspiegelt: die Geschichte geometrischer Anschauungsmittel [14]). Gute bildliche oder körperliche Darstellungen der Systeme

*) Fortschritte 1868.

von Raumelementen fördern den Unterricht und haben häufig zur raschen Verbreitung neuer Ideen beigetragen. In der That findet man schon in den Berichten über geometrische Arbeiten von *Euler*, *Newton*, *Cramer* zahlreiche Figurentafeln. — Das Interesse an der Anfertigung von Modellen scheint sich zuerst in Frankreich ausgebildet zu haben, und zwar infolge des Beispiels und der Thätigkeit *Monge's*. Im Jahr 1830 besass das Conservatoire des arts et métiers in Paris eine ganze Reihe von Fadenmodellen für Flächen zweiten Grads, Konoide und Schraubenflächen. Weiteren Vorschub leistete diesen Bestrebungen *Bardin* (1855); er liess zur Erläuterung des Steinschnitts, der Verzahnungen und anderer Dinge Modelle aus Gyps und Fäden herstellen. Seine Sammlung wurde von *Muret* beträchtlich erweitert. Diese Arbeiten französischer Techniker fanden aber bei den Mathematikern desselben Landes wenig Beifall, wogegen die Engländer, namentlich *Cayley* und *Henrici* im Jahr 1876 in London selbst gefertigte Modelle zur Ausstellung neben anderen wissenschaftlichen Apparaten der Universitäten Cambridge und London brachten.

In Deutschland hat die Anfertigung von Modellen einen Aufschwung erst von der Zeit an genommen, als die Methoden der projektiven Geometrie in die darstellende Geometrie aufgenommen wurden. *Plücker*, der durch Zeichnungen von Kurven dritter Ordnung schon 1835 sein Interesse für gestaltliche Verhältnisse bekundet hatte, stellte 1868 die erste Modellsammlung grösseren Umfangs zusammen; sie bestand aus Modellen von Komplexflächen vierter Ordnung und wurde durch *Klein* um einige weitere auf demselben Gebiet vermehrt. Eine spezielle Fläche vierter Ordnung, die Wellenfläche für optisch zweiaxige Kristalle, wurde 1840 von *Magnus* in Berlin und *Soleil* in Paris hergestellt. Im Jahr 1868 entstand das erste Modell einer Fläche dritter Ordnung mit ihren siebenundzwanzig Geraden unter den Händen von *Chr. Wiener*. — Modelle von Flächen vierter Ordnung und von

gewissen Brennflächen entstanden in den sechziger Jahren durch *Kummer*. Sein Schüler *Schwarz* stellte ebenfalls eine Reihe von Modellen her, unter ihnen Minimalflächen und die Zentrafläche des Ellipsoids. Bei Gelegenheit einer Versammlung von Mathematikern in Göttingen fand eine ansehnliche Ausstellung von Modellen statt, welche weitere Erfolge dieser Art hervorrief.

In weiteren Kreisen haben die durch *A. Brill*, *F. Klein* und *W. Dyck* veranlassten Arbeiten im mathematischen Seminar der Münchner technischen Hochschule Anerkennung gefunden; dort erschienen seit 1877 über hundert Modelle der verschiedensten Art, welche nicht bloss in dem mathematischen Unterricht, sondern auch in Vorlesungen über Perspektive, Mechanik und mathematische Physik förderlich wirken.

Auch von anderer Seite sind neuerdings derartige Anschauungsmittel vervielfältigt worden, Flächen dritter Ordnung von *Rodenberg*, Fadenmodelle von Flächen und Raumkurven vierter Ordnung von *Rohn*, *H. Wiener* und anderen.

Betrachtet man die geometrische Wissenschaft im ganzen, so lässt sich nicht leugnen, dass auf ihrem Gebiet der Unterschied zwischen neuerer analytischer und neuerer synthetischer Geometrie im wesentlichen nicht mehr besteht. Inhalt und Schlussweise beider Richtungen haben sich nach und nach ganz ähnlich gestaltet. Nicht nur die synthetische Methode benützt räumliche Anschauung; auch die analytischen Darlegungen sind nichts anderes als ein klarer Ausdruck räumlicher Beziehungen. Und seit die metrischen Eigenschaften der Gebilde als Beziehungen derselben zu einem Grundgebilde zweiter Ordnung, zum unendlich fernen Kugelkreis dargestellt und dadurch in die Gesamtheit der projektiven Eigenschaften

eingeordnet worden sind, gibt es statt analytischer und synthetischer Geometrie nur noch eine projektive Geometrie, welche in der Raumwissenschaft die erste Stelle einnimmt [57]).

Die letzten Jahrzehnte der Entwicklung namentlich deutscher Mathematik haben dieser zu einer leitenden Rolle verholfen. Es lassen sich im allgemeinen zwei Gruppen zusammengehöriger Arbeiten erkennen [20]). Bei den zu einer Richtung gehörigen Abhandlungen »konzentriert sich nach der Art eines *Gauss* oder *Dirichlet* die Forschung auf möglichst exakte Umgrenzung der einzuführenden Begriffe« in der Funktionentheorie, Zahlentheorie und der mathematischen Physik. Die Untersuchungen der andern Richtung gehen, wie dies bei *Jacobi* und *Clebsch* zu beobachten ist, »von einem kleinen Kreis bereits erkannter Grundbegriffe aus und richten ihr Augenmerk auf die Beziehungen und Folgerungen, welche aus ihnen hervorspriessen«, um der neueren Algebra und Geometrie zu dienen.

Im ganzen darf man wohl sagen, dass die mathematische Wissenschaft [18a]) »von den Zeiten der griechischen Geometrie an in stetem Fortschritt begriffen war. Die Errungenschaften eines *Euklid*, *Archimedes* und *Apollonius* werden heute noch ebenso bewundert wie ehedem. *Descartes*' Coordinatenmethode ist von dauerndem Wert. Aber nie ist die Mathematik eifriger, zielbewusster und erfolgreicher gepflegt worden als in diesem Jahrhundert, in der letzten Hälfte desselben: in der Gegenwart. Die Fortschritte sind ungeheuer, das Arbeitsfeld grenzenlos, die Zukunft voll schöner Hoffnung«.

V. Trigonometrie.

A. Ueberblick.

Die Trigonometrie ist von den Alten zu Zwecken der Astronomie entwickelt worden. In der ersten Periode wird ein Teil der trigonometrischen Grundformeln, allerdings nicht in der modernen Form, von Griechen und Arabern aufgestellt und zu Berechnungen benutzt. Die zweite Periode, welche von der Zeit des allmählichen Aufsteigens mathematischer Kenntnisse im frühesten Mittelalter bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts reicht, festigt die Kenntnis der Rechnung mit Winkelfunktionen und erzeugt Tafeln, in denen die sexagesimale Teilung durch Dezimalbrüche ersetzt wird, was für die rein rechnerische Seite dieser Disziplin einen grossen Fortschritt bedeutet. Während der dritten Periode bildet sich die ebene und sphärische Trigonometrie weiter aus. Namentlich sind es die Polygonometrie und Polyëdrometrie, welche als fast vollständig neu dem Ganzen sich anfügen. Dazu kommen noch die projektiven Formeln, die in engster Beziehung zur projektiven Geometrie eine Reihe interessanter Ergebnisse geliefert haben.

B. Erste Periode.

Von den ältesten Zeiten bis zu den Arabern.

Der Papyrus des *Ahmes* [16]) spricht von einem Quotienten, Seqt genannt. Nachdem man bemerkt hatte, dass die grossen Pyramiden alle nahezu gleiche Neigungswinkel besitzen, ist die Annahme wahrscheinlich gemacht worden, dass dieser Seqt identisch ist mit dem cosinus des Winkels, den die Kante einer grossen ägyptischen Pyramide mit der Diagonale der quadratischen Grundfläche bildet (dieser Winkel ist fast immer

gleich 52°). Bei ägyptischen Grabdenkmälern, die steilere Wände besitzen, scheint der Seqt gleich der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels einer Seitenfläche gegen die Grundfläche zu sein.

Eigentlich trigonometrische Untersuchungen zeigen sich erst bei den Griechen. *Hypsikles* gibt die Einteilung des Kreisumfangs in 360°, die allerdings babylonischen Ursprungs ist, aber erst durch die Griechen ausgebeutet wurde. Seit Einführung dieser Kreiseinteilung waren auch die sexagesimalen Brüche in allen astronomischen Rechnungen des Altertums (mit alleiniger Ausnahme *Heron's*) zu finden, bis endlich *Peurbach* und *Regiomontan* die Dezimalrechnung anbahnten. — *Hipparch* war der erste, der eine Sehnentafel verfertigte, von welcher freilich nur die Nachricht ihrer ehemaligen Existenz übrig geblieben ist. Bei *Heron* finden sich eigentliche trigonometrische Formeln mit Verhältniszahlen zur Berechnung der Inhalte regulärer Vielecke und zwar werden sämtliche Werte von $ctg\,(2\pi : n)$ für $n = 3, 4, \ldots 11, 12$ numerisch bestimmt*). *Menelaus* schrieb sechs Bücher über Sehnenberechnung; diese sind aber wie die Tafeln *Hipparch's* verloren gegangen. Dagegen kennt man drei Bücher der Sphärik von *Menelaus* aus arabischen und hebräischen Uebersetzungen. Diese Sphärik enthält Transversalensätze und Kongruenzsätze für das sphärische (und fürs ebene) Dreieck, ferner für das sphärische Dreieck den Satz, dass $a + b + c < 4R$, $\alpha + \beta + \gamma > 2R$ ist.

Die wesentlichste Schöpfung des *Ptolemäus* besteht in der Einführung einer förmlichen sphärischen Trigonometrie für astronomische Zwecke. Die dreizehn Bücher der »grossen Zusammenstellung«, welche die Ptolemäische Astronomie und Trigonometrie enthalten, gingen in die ara-

---

*) Tannery in Mém. Bord. 1881.

bische, dann in die lateinische Sprache über, und bei letzterer Uebertragung entstand durch Verschmelzung des arabischen Artikels *al* mit einem griechischen Wort der Ausdruck »Almagest«, der heutzutage für das grosse Werk des *Ptolemäus* gang und gäbe ist. — Wie *Hypsikles*, so teilt auch *Ptolemäus* den Kreisumfang nach altbabylonischer Weise in 360^0, aber jeder Grad wird von ihm nochmals halbiert. Als neues findet sich bei *Ptolemäus* die Einteilung des Kreisdurchmessers in 120 gleiche Teile, aus welchen Unterabteilungen nach dem sexagesimalen System in zwei Abstufungen gebildet werden. In den späteren lateinischen Uebersetzungen heissen diese Sechzigstel erster und zweiter Stufe bezüglich partes minutae primae und partes minutae secundae; hieraus entstanden die späteren Benennungen »Minuten« und »Sekunden«). Ausgehend von seinem Satz über das Sehnenviereck berechnet *Ptolemäus* die Sehnen der Bögen von $^1/_2{}^0$ zu $^1/_2{}^0$. Dann aber entwickelt er auch einige Sätze der ebenen, und insbesondere der sphärischen Trigonometrie, wie z. B. Sätze über das rechtwinklige sphärische Dreieck.

Einen weiteren, nicht unwesentlichen Fortschritt hat die Trigonometrie durch die Arbeiten der I n d e r zu verzeichnen. Die Einteilung des Kreisumfangs stimmt mit der babylonisch-griechischen überein; aber im weiteren zeigt sich eine wesentliche Abweichung. Es wird nicht nach griechischer Weise der Halbmesser sexagesimal geteilt, sondern es wird der Kreisbogen, welcher dieselbe Länge wie der Halbmesser hat, in Minuten bestimmt; so ergibt sich für den Inder $r = 3438$ Minuten. — Statt der ganzen Sehnen (jîva) werden die h a l b e n Sehnen (ardhajyâ) in Beziehung zum Bogen gesetzt. In diesem Verhältnis der halben Sehne zum Bogen hat man die hervorragendste Förderung der Trigonometrie durch die Inder zu erblicken. Sie kannten also dem Begriff nach schon das, was man jetzt den Sinus eines Winkels nennt. Ausser-

dem berechneten sie die dem Sinus versus und Cosinus entsprechenden Verhältniszahlen und belegten sie mit besonderen Namen. Der Sinus versus hiess utkramajyâ, der Cosinus kotijyâ. Die Inder kannten ferner den Satz, dass $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ist. Sie verwerteten aber ihre trigonometrischen Kenntnisse nicht zur Lösung von Dreiecksaufgaben in der Ebene, als Hilfsmittel geometrischer Aufgaben, sondern es war ihnen die Trigonometrie untrennbar mit astronomischen Berechnungen verknüpft.

Wie im übrigen mathematischen Wissen, so waren die Araber auch in der Trigonometrie Schüler der Inder und insonderheit der Griechen, aber nicht ohne eigene bedeutende Leistungen. *Albattânî* ist sich wohl bewusst, dass die Einführung der halben an Stelle der ganzen Sehnen, wie sie im Almagest auftreten, also die Rechnung mit dem Sinus eines Winkels bei den Ausführungen einen wesentlichen Vorteil bedeutet. Ausser den im Almagest auftretenden Formeln erscheint bei *Albattânî* die fürs sphärische Dreieck geltende Beziehung $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$. In der Betrachtung rechtwinkliger Dreiecke aus Anlass der Schattenmessung treten die Quotienten $\sin \alpha : \cos \alpha$ und $\cos \alpha : \sin \alpha$ auf; dieselben werden durch *Albattânî*, von Grad zu Grad ausgerechnet, in eine kleine Tabelle zusammengestellt. Hierin liegen die Anfänge der Rechnung mit Tangenten und Cotangenten; diese Namen kommen jedoch erst viel später vor. Die Entstehung der Benennung »Sinus« knüpft an *Albattânî* an. Sein Werk über die Bewegung der Sterne [16]) wurde durch *Plato von Tivoli* ins Lateinische übertragen, und diese Uebersetzung enthält das Wort »Sinus« für die halbe Sehne. Im Indischen hiess die halbe Sehne ardhajyâ oder auch jîva (das ursprünglich nur für die ganze Sehne gebraucht wurde); letzteres Wort übernahmen die Araber einfach dem Lautklang nach als dschîba. Dieselben Konsonanten dieses Wortes, das im Ara-

bischen keine eigene Bedeutung hatte, konnten auch dschaib = Busen, Einschnitt gelesen werden, und diese Aussprache, welche sich, wie es scheint, bei den Arabern verhältnismässig bald einbürgerte, übersetzte *Plato von Tivoli* treffend mit Sinus. Damit war der erste der modernen Namen goniometrischer Funktionen eingeführt.

An astronomischen Tafeln fehlte es zu jener Zeit nicht. *Abûl Wafa*, von welchem der Quotient $\sin\alpha : \cos\alpha$ der zum Winkel α gehörige »Schatten« genannt wurde, berechnete eine Sinustafel für die um je $^1/_2{}^0$ wachsenden Winkel, ebenso eine Tangententafel, die aber nur zur Bestimmung der Sonnenhöhe diente. Etwa gleichzeitig entstanden die hâkimitischen Sinustafeln, welche *Ibn Jûnus von Kairo* auf Veranlassung des ägyptischen Herrschers *Al-Hâkim* entwerfen musste [16]).

Unter den Westarabern war es der berühmte Astronom *Dschâbir ibn Aflah* oder *Geber*, welcher eine vollständige (zunächst sphärische) Trigonometrie auf eigenem Wege und stets gestützt von strengen Beweisen in seiner durch *Gerhard von Cremona* lateinisch herausgegebenen Astronomie veröffentlichte. Diese Arbeit enthält eine Reihe von Formeln über das rechtwinklige sphärische Dreieck; in der ebenen Trigonometrie geht sie aber nicht über den Almagest hinaus und rechnet sogar für diesen Fall mit den ganzen Sehnen, also so wie es *Ptolemäus* gelehrt hatte.

C. Zweite Periode.

Vom Mittelalter bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts.

Von ausländischen Mathematikern hat für die sphärische Trigonometrie in dieser Zeit *Viète* am meisten geleistet, indem er neue Fälle des sphärischen Dreiecks behandelte, z. B. denjenigen, der einen Winkel in den drei Seiten auszudrücken gestattet. Dabei bietet sich ihm Veranlassung, die zwei Grundformeln der sphärischen Trigonometrie aufzustellen und

die von *Snellius* entwickelte Theorie des Supplementardreiecks ganz wesentlich dadurch vorzubereiten, dass er ein Dreieck in ein zweites transformiert, von dem zwei Seiten gleich den entsprechenden Winkeln des ersten, und die dritte Seite das Supplement des dritten Winkels des ursprünglichen Dreiecks wird [19]).

In Deutschland wurde das trigonometrische Lehrgebäude namentlich durch *Regiomontan* gefördert und in seinen Grundzügen mit so sachkundigem Geschick entworfen, dass sich die von ihm konstruierte Anlage im grossen ganzen bis auf den heutigen Tag erhalten hat. Schon *Peurbach* hatte die Absicht, eine Trigonometrie zu schreiben, war aber vor Ausführung seines Planes gestorben. *Regiomontan* brachte die Idee *Peurbach's* zur Ausführung, indem er eine vollständige ebene und sphärische Trigonometrie verfasste. Nach einer kurzen Einleitung geometrischen Inhalts beginnt das erste Buch von *Regiomontan's* Trigonometrie mit dem rechtwinkligen Dreieck, für welches er durch den Sinus allein die zur Berechnung nötigen Formeln ableitet und letztere mit Zahlenbeispielen verdeutlicht. Die Sätze des rechtwinkligen Dreiecks werden zur Berechnung des gleichseitigen und gleichschenkligen Dreiecks benützt. Dann folgen die Hauptfälle des schiefwinkligen Dreiecks, von denen der erste (α aus a, b, c) sehr umständlich behandelt wird. Das zweite Buch enthält den Sinussatz und eine Reihe von Dreiecksaufgaben. Das dritte, vierte und fünfte Buch bringen die sphärische Trigonometrie mit vielen Anklängen an *Menelaus*; insbesondere werden die Winkel aus den Seiten berechnet. Der von *Regiomontan* mit besonderer Weitschweifigkeit behandelte Fall des ebenen Dreiecks (α aus a, b, c) erfuhr eine kürzere Behandlung durch *Rhaeticus*, der die Formel $ctg\,\frac{1}{2}\,\alpha = (s - a) : \rho$ (ρ der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises) aufstellte.

In diesem Zeitraum entstanden auch die *Neper'schen* Gleichungen oder Analogien. Sie drücken eine Beziehung aus

zwischen der Summe oder Differenz zweier Seiten (Winkel) und der dritten Seite (dem dritten Winkel) mit der Summe oder Differenz der beiden Gegenwinkel (Gegenseiten).

Von neueren Benennungen ist, wie erwähnt, der Name »Sinus« der älteste. Die Ende des 15. oder Anfang des 16. Jahrhunderts eingeführte Verkürzung »Cosinus« für complementi sinus rührt von dem Engländer *Gunter* (gest. 1626) her. Die Namen »Tangente« und »Sekante« hat *Thomas Fink* (1583) zuerst benützt; der Name »Sinus versus« war schon früher im Gebrauch [5]).

Von einigen Schriftstellern des 16. Jahrhunderts, z. B. von *Apian*, wurde »Sinus rectus secundus« statt Cosinus geschrieben; *Rhaeticus* und *Viète* haben »perpendiculum« und »basis« statt Sinus und Cosinus [83]). Die Zahlenwerte des Cosinus, dessen Logarithmen von *Keppler* »Antilogarithmen« genannt wurden, finden sich zuerst in der von *Rhaeticus* herausgegebenen Trigonometrie des *Kopernikus* berechnet *).

Die vermehrte Gewandtheit im praktischen Rechnen und das Bedürfnis genauerer Zahlenwerte für astronomische Zwecke erzeugten im 16. Jahrhundert ein Streben nach möglichster Vervollkommnung der trigonometrischen Tafeln. Die Ausführung dieser Tabellen war sehr mühsam, so lange man ohne Logarithmen rechnete. Musste doch *Rhaeticus* allein zu diesem Zweck zwölf Jahre lang einige Rechner anstellen und Tausende von Gulden darauf verwenden [31]).

Die erste Sinustafel deutschen Ursprungs stammt von *Peurbach* her; er setzte den Halbmesser = 600 000 und schritt von $10'$ zu $10'$ weiter (bei *Ptolemäus* war $r = 60$, bei einigen Arabern $r = 150$ genommen). *Regiomontan* berechnete zwei neue Sinustafeln, die eine für $r = 6\,000\,000$, die andere, von der aber keine Ueberreste mehr vorhanden sind, für $r = 10\,000\,000$.

*) M. Curtze in Schlömilch's Zeitschr. XX.

Dazu kam noch von *Regiomontan* eine Tangententafel aller ganzen Grade für $r = 100\,000$. Die beiden letzten Tafeln bilden offenbar einen Uebergang vom sexagesimalen zum Dezimalsystem. Eine von Minute zu Minute fortschreitende Sinustafel für $r = 100\,000$ fertigte *Apianus*.

Bewundernswürdiges leistete auf diesem Gebiet die unermüdliche Beharrlichkeit des *Joachim Rhaeticus*. Er setzte die trigonometrischen Funktionen nicht zu den Kreisbögen in Beziehung, sondern ging vom rechtwinkligen Dreieck aus und sprach daher »perpendiculum« für Sinus, »basis« für Cosinus. Er berechnete (teils selbst, teils durch seine Gehilfen) die erste Sekantentafel, ferner Sinus-, Tangenten- und Sekantentafeln von $10''$ zu $10''$ für den Halbmesser $r = 10\,000$ Millionen, und später noch für $r = 10^{15}$. Nach seinem Tod wurde das ganze Werk von *Valentin Otho* im Jahr 1596 in einem Band von 1468 Seiten herausgegeben [31]).

Mit der Berechnung der Zahlenwerte für trigonometrische Funktionen gab sich auch *Bartholomäus Pitiscus* ab. Im zweiten Buch seiner Trigonometrie spricht er sich über derartige Berechnungen aus. Seine Tafeln enthalten die Werte für den Sinus, die Tangente und Sekante links, und für die Komplemente des Sinus, der Tangente und Sekante (so sagt er für Cosinus, Cotangente, Cosekante) rechts. Daneben stehen Proportionalteile für $1'$ oder auch für $10''$. Der ganzen Berechnung ist ein Halbmesser $r = 10^{25}$ zu Grunde gelegt. Die Arbeit des *Pitiscus* erschien am Anfang des 17. Jahrhunderts.

Die Tafeln der Zahlenwerte goniometrischer Funktionen hatten nun allerdings einen hohen Grad der Zuverlässigkeit erlangt, aber ihre eigentliche Bedeutung und Brauchbarkeit erreichten sie doch erst durch Einführung der Logarithmen.

Als Erfinder der Logarithmen gilt *Neper*, obwohl nicht mit vollem Recht, denn *Keppler* versichert in glaubwürdigster

Weise, *Bürgi* habe vor *Neper* die Berechnung der Logarithmen gekannt, er sei nur mit seiner Veröffentlichung zu spät gekommen. Für *Bürgi* als ersten Erfinder spricht auch seine allgemeinere Betrachtungsweise. Er wollte alle Rechnungsoperationen durch Anwendung der Logarithmen erleichtern, während sich *Neper* nur mit den Logarithmen trigonometrischer Funktionen beschäftigte.

Bürgi wurde zu seinem Verfahren durch Vergleichung der Reihe 0, 1, 2, 3, ... mit der andern 1, 2, 4, 8 ... oder $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ ... geleitet. Er bemerkte, dass es mit Rücksicht auf die Ausrechnungen am zweckmässigsten sei, für die zweite Reihe die Grundzahl 10 zu wählen, und er berechnete hievon ausgehend die Logarithmen gewöhnlicher Zahlen, dachte aber erst an eine Veröffentlichung, als sich *Neper's* Ruhm in Deutschland namentlich durch *Keppler's* beifällige Aeusserungen zu verbreiten anfing. *Bürgi's* »Geometrische Progress Tabulen« erschienen 1620 in Prag [31]) und enthielten die Logarithmen der Zahlen 10^8 bis 10^9 von 10 zu 10 fortschreitend. Den Ausdruck »Logarithmus« gebraucht *Bürgi* nicht; er nennt der Ausführung im Druck entsprechend die Logarithmen »rote«, die Numeri »schwarze Zahlen«.

Neper ging von der Bemerkung aus, dass, wenn im Kreis mit den zu einander senkrechten Halbmessern OA_0 und OA_1 ($r = 1$) der Sinus $S_0S_1 \parallel OA_1$ von O bis A_0 in Intervallen fortrückt, die eine arithmetische Reihe bilden, sein Wert in geometrischer Progression abnimmt. Das Stück OS_0 nannte *Neper* ursprünglich den »Numerus artificialis«, später die Richtungszahl oder den »Logarithmus«. Die erste Veröffentlichung über das neue Rechnungsverfahren, in welchem $r = 10^7$, log sin $90^0 = 0$, log sin $0^0 = +\infty$ wurde, so dass also die Logarithmen zunahmen bei abnehmendem Sinus, erfolgte 1614 und erregte grosses Aufsehen. *Henry Briggs* hatte *Neper's* Werk eingehend studiert und machte die wichtige Bemerkung, dass es für die Rechnung förderlicher sei,

die Logarithmen mit den Zahlen w a c h s e n zu lassen. Er machte den Vorschlag, log 1 = 0, log 10 = 1 zu setzen, und *Neper* erklärte sich damit einverstanden. Die auf Grund solchen Aenderungsvorschlages ausgearbeitete Logarithmentafel von *Briggs* für die gewöhnlichen Zahlen von 1 bis 20 000 und von 90 000 bis 100 000 war auf vierzehn Dezimalstellen gerechnet. Die vorhandene Lücke füllte der holländische Buchhändler *Adrian Vlacq* aus; seine Tafel, im Jahr 1628 erschienen, enthält die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100 000 auf zehn Dezimalstellen. Mit dieser Tafel hatte *Vlacq* unter dem Namen seines Freundes *de Decker* die Logarithmen auf dem Kontinent eingeführt. Unterstützt von *Vlacq* und *Gellibrand* leitete *Briggs* auch noch die Ausrechnung einer Sinustafel auf vierzehn, einer Tangenten- und Sekanten-Tafel auf zehn Dezimalstellen, und zwar von 36″ zu 36″. Diese Tafeln erschienen 1633. Gegen Ende des 17. Jahrhunderts veröffentlichte *Claas Vooght* eine Tafel des Sinus, der Tangente und Sekante mit ihren Logarithmen, und zwar, was besonders merkwürdig ist, ganz in Kupfer gestochen.

Damit war fürs logarithmische Rechnen ein für alle Zeiten wertvolles Tabellenmaterial geschaffen. Erweitert wurde dasselbe durch die Einführung der stets nach *Gauss* benannten Additions- und Subtraktionslogarithmen, deren Erfinder nach *Gauss*' eigener Angabe *Leonelli* ist. Dieser hatte zur Ausführung eine Tafel mit vierzehn Dezimalen vorgeschlagen; *Gauss* hielt dies für unzweckmässig und berechnete sich für seinen Gebrauch eine Tafel mit fünf Dezimalen *).

Im Jahr 1875 bestanden 553 verschiedene Logarithmentafeln mit zwischen 3 und 102 Dezimalstellen. Nach der Häufigkeit geordnet stehen obenan die siebenstelligen Tafeln, dann folgen die mit fünf, sechs, vier und zehn Stellen. Die einzige Tafel mit 102 Stellen gehört einem Werk von *H. M. Parkhurst* an (Astronomical tables, New-York 1871).

Untersuchungen über die in Logarithmentafeln auftretenden Fehler hat *J. W. L. Glaisher* **) gemacht. Dabei hat sich herausgestellt, dass

---

*) G a u s s' Werke III, S. 244. P o r r o in Bonc. Bull. XVIII.

**) Fortschritte 1873.

jede vollständige Tafel direkt oder indirekt nach einer mehr oder weniger sorgfältigen Durchsicht von der Tafel abgeschrieben worden ist, welche, im Jahr 1628 veröffentlicht, die Ergebnisse von *Briggs'* Arithmetica logarithmica von 1624 für die Zahlen 1 bis 100 000 auf zehn Stellen angibt. *Glaisher* findet in den ersten sieben Stellen 171 Fehler, von denen 48 auf das Intervall 1 bis 10 000 fallen. Diese von *Vlacq* herrührenden Irrtümer verschwanden erst nach und nach. Von den Fehlern in *Vlacq's* Tafel zeigen sich noch 98 bei *Newton* (1658), 19 bei *Gardiner* (1742), 5 bei *Vega* (1797), 2 bei *Callet* (1855), 2 bei *Sang* (1871). Von den durch *Glaisher* geprüften Tafeln stellten sich 4 als völlig fehlerfrei heraus, nämlich die von *Bremiker* (1857), *Schrön* (1860), *Callet* (1862) und *Bruhns* (1870). — Beiträge zur raschen Berechnung der gemeinen Logarithmen rühren von *Koralek* (1851) und *R. Hoppe* (1876) her; letzterer stützt sich auf den Satz, dass jede positive Zahl in ein unendliches Produkt verwandelt werden kann[108]).

D. Dritte Periode.

Von der Mitte des 17. Jahrhunderts bis zur Gegenwart.

Nachdem *Regiomontan* die Grundzüge der ebenen und sphärischen Trigonometrie aufgestellt, und seine Nachfolger für Erleichterung des Rechengeschäfts durch Ausführung von Tafeln der Zahlenwerte trigonometrischer Funktionen und durch Schaffung eines brauchbaren Logarithmensystems gesorgt hatten, konnte der innere Ausbau dieser Hilfswissenschaft während der dritten Periode ins einzelne weiterschreiten. Wichtige Neuerungen rühren in erster Linie von *Euler* her, der die ganze sphärische Trigonometrie aus einigen einfachen Sätzen ableitete[5]). Die goniometrischen Funktionen definiert *Euler* als blosse Zahlen, um sie für Reihen einführen zu können, in deren Gliedern Kreisbögen auftreten, von welchen die trigonometrischen Funktionen nach gewissen Gesetzen fortschreiten. Von ihm rührt auch eine Anzahl teils ganz neuer, teils wenigstens in der Ausdrucksweise vervollkommneter trigonometrischer Formeln her. Diese werden dadurch besonders übersichtlich, dass *Euler* die Elemente des Dreiecks

mit a, b, c, α, β, γ bezeichnet. So konnten Ausdrücke wie sin α, tg α eingeführt werden, während man früher besondere Buchstaben zum gleichen Zweck benutzte[5]). — *Lagrange* und *Gauss* haben sich bei der Ableitung der sphärischen Trigonometrie auf einen einzigen Satz beschränkt. Das Gleichungssystem

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b+c}{2}=\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

mit den zugehörigen Relationen wird gewöhnlich auch unter *Gauss*' Namen aufgeführt, obwohl diese Gleichungen zuerst von *Delambre* 1807 veröffentlicht wurden (von *Mollweide* 1808, von *Gauss* 1809)[45]). Aehnlich liegen die Dinge bei der *Pothenot'schen* Aufgabe; sie wurde von *Snellius* 1614, von *Pothenot* 1692, von *Lambert* 1765 bearbeitet[5]).

Die Hauptsätze der Polygonometrie und Polyëdrometrie wurden im 18. Jahrhundert aufgestellt. Von *Euler* stammt der Satz über den Flächeninhalt der Normalprojektion einer ebenen Figur in eine andere Ebene, von *Lexell* der Satz über die Projektion eines polygonalen Zugs. *Lagrange*, *Legendre*, *Carnot* und andere stellten trigonometrische Sätze über Vielflache (besonders über das Tetraëder), *Gauss* über das sphärische Viereck auf.

Das 19. Jahrhundert brachte der Trigonometrie eine Reihe neuer, sogenannter projektiver Formeln. Neben *Poncelet*, *Steiner*, *Gudermann* ist besonders *Möbius* zu nennen, der eine Verallgemeinerung der sphärischen Trigonometrie in der Weise vorgenommen hat, dass in Dreiecken Seiten oder Winkel 180° überschreiten können. Die wesentliche Förderung, welche in neuerer Zeit trigonometrische Entwicklungen anderen mathematischen Wissenschaften gebracht haben, möge nur mit diesem einen Worte angedeutet sein; die ausführliche Schilderung derselben würde erheblich ins Gebiet anderer Wissenszweige übergreifen.

VI. Biographische Notizen.

a. Aelteste Zeit.

1. *Ahmes,* zwischen 2000 und 1700 v. Chr., Verfasser des ältesten ägyptischen Rechenbuchs.

b. Griechen.

2. *Thales von Milet,* 640—548, einer der sieben Weisen Griechenlands, lebte längere Zeit in Aegypten und brachte von dort her mathematische Kenntnisse nach Griechenland.

3. **Pythagoras von Samos** schuf in Grossgriechenland eine Schule, welche durch ihre zahlreichen Anhänger und deren geschlossenes Auftreten auch eine politische Bedeutung gewann. Wahrscheinlich ist Pythagoras 569 geboren, 510 in Italien aufgetreten und 470 bei einem Aufstand gegen seine Schule getötet worden. Zweifellos hielt sich Pythagoras längere Zeit in Aegypten auf; weniger sicher ist eine Reise nach Babylon.

4. *Anaxagoras* von Klazomene, 500—428, von 464 ab in Athen; Lehrer des Euripides und Perikles.

5. *Oinopides* von Chios, etwas jünger als Anaxagoras.

6. *Demokritus* von Abdera, etwa 40 Jahre jünger als Anaxagoras.

7. *Hippias* von Elis, älterer Zeitgenosse des Sokrates, geboren etwa 460, ein wegen seiner Eitelkeit berüchtigter Sophist.

8. *Hippokrates* von Chios lebte in der zweiten Hälfte des 5. Jahrhunderts in Athen.

9. *Theodorus* von Kyrene, um 400, aus der Schule der Pythagoräer, in mathematischen Dingen Lehrer des Platon.

10. **Platon** 429—348, aus einer der angesehensten athenischen Familien, Schüler des Sokrates, verbrachte viele Jahre auf Reisen und kam so nach Kyrene an der Nordküste Afrikas zu Theodorus, nach Aegypten und Grossgriechenland.

11. *Archytas* von Tarent, 430—365, befreundet mit Platon, Staatsmann und Feldherr.

12. *Theätet* von Athen, Zeitgenosse und Freund des Platon.

13. *Eudoxus* von Knidos, 408—355, Schüler des Archytas und des Platon, bekannt als Geometer, Astronom, Arzt, Staatsmann.

14. *Menächmus* zwischen 400 und 300, Schüler des Eudoxus.

15. *Dinostratus*, Bruder des Menächmus.

16. *Aristoteles* von Stagira, 384—322, Schöpfer der peripathetischen Schule, von 343—340 Erzieher Alexanders des Grossen.

17. *Autolykus*, ein älterer Zeitgenosse des Euklid.

18. **Euklid** wirkte um 300 in Alexandrien. Hauptwerke: Die Elemente in dreizehn Büchern; die drei Bücher der Porismen (aus Pappus bekannt); die Daten; das Buch der Teilung der Figuren; vier Bücher über die Kegelschnitte; zwei Bücher über Oberflächenörter (die letzten drei Schriften sind nur in wenigen Bruchstücken bekannt).

19. **Archimedes**, wahrscheinlich 287 in Syrakus geboren, stand in Beziehung zu den Alexandrinern und wurde 212 bei der Einnahme seiner Vaterstadt von einem römischen Soldaten getötet. Von seinen nur zum Teil erhaltenen Schriften sind zu nennen: zwei Bücher vom Gleichgewicht der Ebenen (mit einer Abhandlung über die Quadratur der Parabel); zwei Bücher von der Kugel und vom Cylinder; die Kreismessung; die Spiralen; die Konoide und Sphäroide; die Sandzahl; zwei Bücher von den schwimmenden Körpern; Wahlsätze.

20. **Eratosthenes** von Kyrene in Nordafrika, geboren 275, gestorben 194, wirkte meist in Alexandrien als Vorsteher der Bibliothek unter Ptolemäus Euergetes. Abgesehen von philosophischen und grammatischen Abhandlungen schrieb er über Geographie, Erdmessung, Chronologie und Würfelverdopplung.

21. **Apollonius** von Pergä in Pamphilien, zwischen 300 und 200. Seine Hauptwirksamkeit in Alexandrien fällt in die Regierungszeit des Ptolemäus Philopator. Sein Hauptwerk, die acht Bücher der Kegelschnitte, trug ihm den Beinamen des grossen Mathematikers ein. Ausserdem schrieb er unter anderem zwei Bücher vom Verhältnisschnitt (aus einer arabischen Uebersetzung bekannt) und Abhandlungen über den bestimmten Schnitt, über Berührungen und ebene Oerter (sämtlich verloren).

22. *Nikomedes, Diokles, Perseus, Zenodorus, Hypsikles* und **Hipparch**, zwischen 200 und 100.

23. **Heron** *von Alexandria.* Seine Hauptthätigkeit spielte sich ums Jahr 100 v. Chr. ab. Als von ihm herrührend wird eine Mechanik und ein Lehrbuch der Feldmessung genannt.

24. *Geminus* von Rhodus (wahrscheinlich kurze Zeit nach Heron) schrieb eine Astronomie und ein grösseres mathematisches Werk von unbekanntem Titel.

25. *Serenus* von Antissa, vielleicht zwischen 100 und 200 n. Chr., betrachtete Schnitte an Kegeln und Cylindern.

26. *Menelaus von Alexandria*, um 100 n. Chr., Astronom, der auch

in Rom Beobachtungen angestellt hat. Er verfasste drei Bücher der Sphärik (teilweise aus arabischen und hebräischen Uebersetzungen bekannt) und sechs Bücher über die Berechnung der Sehnen (verloren).

27. **Klaudius Ptolemäus** *von Alexandria.* Seine Hauptwirksamkeit fällt in die erste Hälfte des 2. Jahrhunderts n. Chr. Die dreizehn Bücher der grossen Zusammenstellung enthalten ein astronomisches und trigonometrisches Lehrgebäude.

28. *Nikomachus* von Gerasa, *Theon* von Smyrna und *Thymaridas*, zwischen 100 und 150 n. Chr. in Alexandrien.

29. *Sextus Julius Afrikanus* im Anfang des 3. Jahrhunderts.

30. *Pappus von Alexandrien* lebte ungefähr am Ende des 3. Jahrhunderts. Er war Vorsteher einer Schule und verfasste eine »Sammlung« in acht Büchern. (Nach Chasles lebte er gegen Ende des 4. Jahrhunderts).

31. *Jamblichus* aus Chalcis in Cölesyrien, lebte am Anfang des 4. Jahrhunderts.

32. **Diophantus von Alexandria** schrieb am Anfang des 4. Jahrhunderts ein arithmetisches Werk in dreizehn Büchern.

33. *Theon* von Alexandrien (Bearbeiter der Euklidischen Elemente und des Almagests) und seine gelehrte Tochter *Hypatia* wirkten in der zweiten Hälfte des 4. Jahrhunderts.

34. *Proklos von Byzanz* (lat. ohne Zweifel *Proculus*) geboren 411 n. Chr. zu Konstantinopel, gestorben zu Athen 485; der bedeutendste der Neuplatoniker. Er heisst auch der Lykier, weil er von lykischen Eltern stammte. Seine Bildung hatte er in Alexandrien erworben. Von seinen mathematischen Werken ist das bedeutendste der Kommentar zu Euklid's Elementen.

35. *Eutokius*, um 550, Kommentator mehrerer Schriften Euklids.

c. Römer.

36. *Sextus Julius Frontinus*, *Hyginus*, *Balbus*, *Nipsus*, *Epaphroditus*, *Vitruvius Rufus*, die bedeutendsten römischen Feldmesser, lebten zwischen 50 und 150 n. Chr.

37. Ancius Manlius Severinus *Boethius* (oder *Boetius*), um 500 n. Chr.

d. Inder.

38. *Aryabhatta*, geboren 476 n. Chr.; *Brahmagupta*, geboren 598; *Bhâskara*, geboren 1114, Astronomen.

e. Araber.

39. *Hunain ibn Ishâk; Muhammed ibn Mûsâ* **Alchwarizmî**; *Mûsâ ibn Schâkir* und seine drei Söhne; *Tabit ibn Kurra* in Bagdad; *Muhammed ibn Dschâbir* **Albattâni** oder *Albategnius;* **Abû'l Wafâ** *Albûzdschânî; Alkûhî; As-Sâgânî;* Uebersetzer und Bearbeiter mathematischer Werke, sowie Astronomen zwischen 800 und 1000, meist in Bagdad.

40. Abû Muhammed *Alchodschandî* aus Chodschanda in Chorasan; Ibn *Sînâ* (Avicenna); *Albirûnî; Abû'l Dschûd; Alnasawî; Alkindî; Alkarchî;* Omar *Alchaijâmî;* Algebraiker und Zahlentheoretiker zwischen 900 und 1100 n. Chr.

41. Ibn *Jûnus;* Ibn *Alhaitam* (Alhazen), Astronomen in Aegypten (Kairo) um 1000 n. Chr.

42. *Dschâbir ibn Aflah (Geber)* im 11. Jahrhundert Astronom in Sevilla; Ibn *Albannâ* zwischen 1250 und 1300; *Alkalsâdî* zwischen 1400 und 1480, westarabische Mathematiker.

f. Klostergelehrte des Mittelalters.

43. *Isidorus,* 601—636 Bischof von Sevilla; *Beda,* starb 735 in einem Kloster am Tyne; *Alcuin* 796—804 Abt des St. Martin Klosters in Tours; **Hrabanus Maurus**, Abt von Fulda und Erzbischof von Mainz, starb 856; *Remigius* von Auxerre gestorben 908; *Odo,* Abt von Cluny, gestorben 942; **Gerbert**, Abt des Klosters Bobbio an der Trebbia, Metropolitan von Rheims, starb als Papst Sylvester II 1003; *Bernelinus,* Schüler Gerbert's; Vertreter der älteren Klostergelehrsamkeit.

44. *Johannes von Sevilla,* um 1150; *Atelhart von Bath* um dieselbe Zeit; *Plato von Tivoli, Gerhard von Cremona;* Uebersetzer und Erklärer arabischer Schriften im 12. Jahrhundert. *Barlaam* und *Maximus Planudes* am Anfang des 14. Jahrhunderts.

45. *Johannes von Holywood* (lateinisch: de Sacro-Bosco) stammt von Holywood in Yorkshire, lehrte um die Mitte des 13. Jahrhunderts in Paris Philosophie und Mathematik; starb 1244 oder 1256 in Paris. — *Roger Bacon* 1214—1292 (1294), studierte in Oxford und Paris; lehrte in Oxford. — *Thomas Bradwardine* 1290—1349; Erzbischof von Canterbury.

46. *Moschopulus,* ein Byzantiner des 14. Jahrhunderts.

g. Vom Mittelalter bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts.

47. **Leonardo** aus Pisa, Fibonacci (Sohn des Bonacco) genannt, um 1220; *Luca Pacioli* (Paciuolo) geboren etwa 1445 im obern Tiberthal, Franziskanermönch, Lehrer der Mathematik u. a. in Neapel,

Mailand, Venedig, Rom, wo er nicht lange nach 1514 starb; *Nicole Oresme*, gestorben 1382 als Bischof von Lisieux in der Normandie; Francesco *Maurolico* 1494—1575 in Messina, verdient um die Wiederherstellung der Schriften antiker Mathematiker; *Scipione Ferro* 1496 bis 1525; *Nicolo* **Tartaglia** 1500 oder 1501—1557; Hieronimo **Cardano** von Mailand, 1501—1576, und sein Schüler Ludovico *Ferrari; Bombelli* um 1580; *Barozzi* 1537—1604; Pietro Antonio *Cataldi* 1548—1626; italienische Mathematiker.

48. *François* **Viète** (Vieta) 1540—1603, Hugenott, Rat Heinrichs IV.

49. Johannes *Schindel* (Joannes de Praga) geboren in Königgrätz zwischen 1370 und 1375, wurde 1410 Rektor der Prager Hochschule, starb 1450. Der Humanist und nachmalige Papst Enea Silvia feierte ihn als hervorragenden Astronomen und Mathematiker.

50. Nicolas *Chuquet*, um 1500.

51. *Johann von Gmunden*, gestorben 1442 als Astronom in Wien.

52. Georg von **Peurbach** (oder Peuerbach), geboren 1423 zu Peuerbach bei Linz, gestorben 1461 in Wien. Bearbeiter des Almagest.

53. **Regiomontanus** (Johannes Müller), geboren 1436 zu Königsberg in Franken, Schüler Peurbach's, kam im Gefolge des Kardinals Bessarion nach Rom, Venedig und Padua, trat dann in die Dienste des Königs Matthias Corvinus von Ungarn, lebte von 1471—1475 in Nürnberg und starb 1476 in Rom, wohin er durch Papst Sixtus IV zur Kalenderverbesserung berufen worden war.

54. *Nikolaus von Cusa*, Kardinal, geboren 1401 zu Cues bei Trier, gestorben 1464 als Bischof von Brixen. Er studierte in Padua und übersetzte griechische Schriften ins Lateinische. Von ihm stammen neun mathematische und vier astronomische Werke.

55. *Johann Werner*, Geistlicher in Nürnberg, 1468—1528.

56. *Albrecht Dürer* 1471—1528, Maler. *Jan van Eyck* 1385—1440, niederländischer Maler. *Brunelleschi* 1377—1446; *Donatello* 1386—1468; *Leo Battista Alberti* 1404—1472; *Piero della Francesca* um 1500; *Camillo Aggrippa*, Baumeister unter Papst Gregor XIII; italienische Baumeister. *Guido Ubaldi* 1545—1607, *Bernardino Baldi* 1553—1617, Verfasser der Lebensbeschreibungen von mehr als zwei Hundert Mathematikern des Altertums und Mittelalters; italienische Mathematiker.

57. *Johann Widmann* von Eger, um 1490; *Johann Scheybl* (Scheubelius) von Kirchheim, Professor der Mathematik in Tübingen, 1494 bis 1570; *Jakob Köbel*, Stadtschreiber zu Oppenheim, um 1520; **Grammateus** (Heinrich Schreiber) um 1520; **Adam Riese**, geboren 1492 zu Staffelstein in Franken, gestorben 1559 zu Annaberg; Petrus *Apianus* (Bienewitz) gestorben 1552 als Professor der Astronomie in Ingolstadt;

Simon *Stevin*, geboren 1548 zu Brügge, gestorben 1620 als holländischer Deichinspektor. *Petrus Ramus* (Pierre de la Ramée), geboren 1515 bei Soissons, gestorben 1572 in Paris; *Peter Roth*, gestorben 1617 als Rechenmeister in Nürnberg. Verfasser von elementaren Rechenbüchern und Algebraiker.

58. *Gerhard Mercator*, geboren 1512 zu Rupelmonde in Flandern, gestorben 1594 zu Duisburg als Cosmograph des Herzogs von Jülich.

59. **Christof Rudolff** aus Jauer in Schlesien, bildete sich auf der Wiener Hochschule aus; um 1530.

60. **Michael Stifel**, geboren 1487 in Esslingen, erst Augustinermönch, trat 1522 der Reformation bei und war ein vertrauter Freund Luthers. Nach einem wechselvollen Leben als Pfarrer und Lehrer der Mathematik starb er 1567 in Jena.

61. *Jost Bürgi* (Justus Byrgius), geboren 1552 zu Lichtensteig in Toggenburg, kam als wandernder Uhrmacher nach Kassel, wo er Gehilfe des Astronomen Rothmann wurde. Später trat er in die Dienste Kaiser Rudolf's II und kam in Prag mit Keppler in nahe Berührung. Er starb 1632 in Kassel.

62. *Johann Faulhaber*, Kriegsbaumeister und Lehrer der Mathematik in Ulm 1580—1635.

63. *Lord John Napier* (Neper) von Merchiston in Schottland, 1550—1617.

64. *Henry Briggs* 1560—1630, Professor der Astronomie am Gresham College in London, später in Oxford.

64a. Philips van *Lansberg*, geboren 1561 zu Gent; Arzt und Prediger zu Antwerpen, gestorben 1632 zu Middelburg.

65. *Henry Gellibrand*, Professor der Astronomie am Gresham College, 1597—1637.

66. *Nikolaus Reymers*, astronomischer Schriftsteller, Schüler Bürgi's, bis zu seinem 18. Jahr Schweinehirt; Hofmathematikus des Kaisers Rudolf II in Prag, starb wahrscheinlich 1599 auf der Flucht, während er der Rache Tycho Brahe's, den er mit Schmähungen überhäuft hatte, zu entgehen versuchte.

67. *Georg Joachim (Rhaeticus)*, geboren 1514 zu Feldkirch im Vorarlberg, studierte in Wittenberg, später bei Kopernikus in Frauenburg. Er lehrte in Nürnberg und Leipzig und starb 1576 zu Kaschau in Ungarn.

68. *Ludolf van Ceulen*, geboren 1540 in Hildesheim in Sachsen, gestorben 1610 in Leyden, wo er lange Jahre hindurch das Amt eines Lektors an der vom Prinzen Moriz von Nassau mit der Universität verbundenen Genieschule inne hatte. Auf seinem Grabstein, der allerdings verloren gegangen ist, von welchem aber aus einem alten Werk

eine genaue Beschreibung erhalten ist, stand die Zahl π auf 34 Dezimalstellen eingegraben.

69. *Bartholomäus Pitiscus*, geboren 1561 zu Schlaune in Schlesien, gestorben 1613 als kurpfälzischer Oberhofprediger in Heidelberg.

70. **Johann Keppler,** geboren am 27. Dezember 1571 in Weil der Stadt, 1589 Schüler Mästlins in Tübingen, 1594 Lehrer der Mathematik und Moral in Graz, 1600 Gehilfe Tycho Brahe's in Prag, 1601 dessen Nachfolger, 1612 Professor am Gymnasium in Linz, 1626 in Ulm, 1628 bei Wallenstein in Sagan; 1630 starb er in Regensburg, wo er vor dem versammelten Reichstag seine Gehaltsansprüche bei dem Kaiser geltend zu machen versuchte.

71. *Michael Mästlin* 1550—1631, Professor der Mathematik in Tübingen.

72. Daniel *Schwenter*, geboren 1585 zu Nürnberg, gestorben 1636 als Professor der gesamten orientalischen Sprachen und der Mathematik an der Universität Altdorf.

73. *Benjamin Ursinus* (Behr) starb als Professor der Mathematik in Frankfurt an der Oder 1634.

74. *Paul Guldin*, geboren 1577 zu St. Gallen von protestantischen Eltern, wurde 1597 zu Freisingen Jesuit und starb 1643 als Lehrer der Mathematik in Graz.

75. *Thomas Harriot*, geboren in Oxford 1560, gestorben in London 1621.

76. *William Oughtred* 1574—1660.

77. Claude Gaspard *Bachet de Méziriac*, geboren in Bourg-en-Bresse 1581, beschäftigte sich mit unbestimmter Analytik; gestorben 1638.

78. Grégoire de *Saint-Vincent*, Jesuit, geboren in Brügge 1584, gestorben in Gent 1667.

79. *Albert Girard* 1590—1634.

80. Willibrord *Snell* (Snellius) van Roijen, 1591—1626; seit 1613 Professor der Mathematik in Leyden.

81. *Gerard Desargues*, geboren in Lyon 1593, Architekt, gab Vorlesungen in Paris von 1626—1630; gestorben 1662.

82. *James Dodson*, geboren 1597, gestorben 1657 in London.

h. Von der Mitte des 17. Jahrhunderts bis zur Gegenwart.

83. **René Descartes,** geboren 1596 in der Nähe von Tours, gestorben 1650 in Stockholm. Er kam 1612 nach Paris, ging 1617 zur Armee des Prinzen von Oranien; bei Beginn des 30jährigen Kriegs trat er als Freiwilliger ins bayrische Heer ein, verliess dasselbe 1621, verbrachte dann fünf Jahre auf Reisen, und studierte unterdessen immer

Mathematik. 1628 ging er nach Holland; 1637 erschien seine wichtige Entdeckung als »Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences«; 1647 erhielt er eine Pension von Frankreich als Anerkennung seiner Leistungen; 1649 ging er auf Einladung der Königin Christine nach Schweden und starb wenige Monate nachher.

84. *Bonaventura Cavalieri,* geboren in Mailand 1598, Jesuit, starb 1647 als Professor der Mathematik in Bologna.

85. *Cessius Magnus,* Professor der Mathematik an der Universität Upsala, gestorben 1679.

86. *Antoine de Laloubère,* Jesuit, 1600—1664.

87. **Pierre de Fermat,** geboren in der Nähe von Montauban 1601, gestorben in Toulouse 1665.

88. *Florimond de Beaune* 1601—1652.

89. *Gilles Personnier,* genannt *Roberval,* geboren in Roberval 1602, gestorben in Paris 1675 als Professor an der Universität.

90. *Bernard Frénicle de Bessy* 1605—1675 in Paris, Freund Fermat's.

91. *Evangelista Torricelli,* geboren in Faënza 1608, gestorben 1647.

92. *John Pell,* geboren 1610 in Southwyke (Sussex), gestorben 1685 in London; erst Professor der Mathematik in Amsterdam und Breda, dann Cromwell's Resident in der Schweiz, endlich Geistlicher.

93. **John Wallis,** geboren in Ashford 1616, gestorben als Professor der Geometrie in Oxford 1703.

94. *Michel-Ange Ricci,* geboren 1619, starb 1692 als Kardinal in Rom.

95. *William Lord Brouncker,* einer der Gründer der Royal Society of London, 1620—1684.

96. *Franz van Schooten* 1620—1661 Professor in Leyden. Er gab 1649 Descartes' »Géométrie« mit Anmerkungen lateinisch heraus; ferner besorgte er eine Ausgabe von Viète's Werken.

96a. *Giovanni Domenico Cassini,* geboren 1625 zu Perinaldo bei Nizza, gestorben 1712 als Direktor der Sternwarte zu Paris.

96b. *Jean de Witt,* geboren 1625, Freund Descartes' und eifriger Verbreiter von dessen neuen Methoden; Grosspensionär der Republik Holland; wurde 1672 in einem Volksaufstand getötet.

97. *Nikolaus Merkator,* geboren 1620 in Holstein, lebte meist in England, ging 1683 nach Frankreich, baute die Wasserkünste in Versailles, erhielt keine Bezahlung und starb 1687 in Armut in Paris.

98. *René Francis Walter de Sluze,* Kanonikus von Liège, 1622—1685.

99. *Vincenzo Viviani,* Schüler Galilei's, geboren 1622 in Florenz, gestorben 1703.

100. **Blaise Pascal,** geboren zu Clermont 1623, gestorben zu Paris

1662. Mit 16 Jahren schrieb er über Kegelschnitte, mit 18 Jahren konstruierte er seine Rechenmaschine. Später widmete er sich abwechslungsweise mathematischen und physikalischen Studien und religiösen Meditationen.

101. *Johann Hudde,* Bürgermeister von Amsterdam, 1633—1704.

102. **Christian Huygens,** geboren in Haag 1629, gestorben 1695. (Die Schreibweise »Huygens« findet sich auf Linsen, die Huygens 1685 geschliffen hat).

103. *Isaac Barrow,* geboren in London 1630, gestorben in Cambridge 1677.

104. *Gerhard Kinckhuysen* aus Holland, 1630—1679.

105. *Christopher Wren* 1632—1723, Professor der Mathematik in Oxford, dann Generalinspektor der Kgl. Gebäude in London.

106. *Johann Christof Sturm* 1635—1703, Professor der Mathematik in Altdorf. Sein Sohn *Leonhard Christof Sturm,* 1669—1719, starb als herzoglich meklenburgischer Baudirektor.

107. *James Gregory,* geboren 1638, gestorben 1675 in Edinburgh.

108. *Philippe de Lahire* 1640—1718 in Paris.

109. **Isaac Newton,** geboren in Lincolnshire 1642, gestorben in Kensington (London) 1727.

110. **Gottfried Wilhelm Leibniz,** geboren 1646 zu Leipzig; 1666 in Nürnberg, 1672 in Paris, 1673 in London, dann bis 1676 wieder in Paris. Im Oktober 1676 reiste er über London, wo er mit Collins verkehrte, nach Amsterdam, kam in nähere Berührung mit Hudde und erreichte im Dezember 1676 Hannover; 1678—1684 Briefwechsel mit Tschirnhaus; 1693 bis zu seinem Tod Korrespondenz mit Johann Bernoulli. Leibniz starb am 14. November 1716.

111. *Jean Céva* 1648—1737.

112. *Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (Tschirnhausen),* geboren 1651 zu Kisslingswalde bei Görlitz; 1668 Schüler Descartes' in Leyden; 1675 in Paris (enger Verkehr mit Leibniz), von 1700 an in Dresden; gestorben 1708.

113. *Michel Rolle,* geboren 1652, gestorben 1719 in Paris.

114. **Jakob Bernoulli** 1654—1705 in Basel. *Johann Bernoulli,* Bruder des vorigen, 1667—1748, Professor der Mathematik in Gröningen und Basel.

Nikolaus Bernoulli, geboren 1695, seit 1726 Professor in Petersburg.

Daniel Bernoulli 1700—1782, Professor in Petersburg und Basel.

Johann Bernoulli (der jüngere) 1710—1790, Professor in Basel; Söhne des Johann Bernoulli.

115. *Edmund Halley,* geboren 1656, gestorben 1724 als Astronom in Greenwich; einige Zeit Professor der Geometrie zu Oxford.

116. *Joseph Saurin,* geboren 1659, gestorben 1737 in Paris.

117. *Guillaume François Antoine L'hospital,* Marquis de St.-Mesme, 1661—1704 in Paris.

118. *Antoine Parent* 1666—1716 in Paris.

119. **Abraham de Moivre,** geboren 1667 in Vitry, gestorben 1754 in London.

120. *Jacopo Francesco Count Riccati*, geboren in Venedig 1676, gestorben in Trèves 1754.

121. *Pierre Raymond de Montmort* 1678—1719 in Paris.

122. *Christian Wolf,* geboren 1679 in Breslau; 1707—1723 Professor der Mathematik in Halle, dann (wegen Irreligiosität vertrieben) in Marburg, von 1740 an wieder in Halle; er starb 1754.

123. *Giulio Carlo Count de Fagnano* 1682—1766.

124. *Roger Cotes,* geboren 1682, gestorben 1716 in Cambridge.

125. *François Nicole* 1683—1758 in Paris.

126. **Brook Taylor,** geboren 1685, gestorben 1731 in London.

127. *Amédé François Frézier,* geboren 1682, gestorben 1776 in Brest.

128. *Christlieb von Clausberg,* geboren 1689 zu Danzig, gestorben 1751 zu Kopenhagen.

129. *Colin Maclaurin,* geboren 1698, gestorben in York 1746.

130. *Georg Wolfgang Krafft,* geboren 1701 in Tuttlingen, gestorben 1754 als Professor der Mathematik und Physik in Tübingen.

131. *Gabriel Cramer,* geboren 1704 in Genf, lehrte dort Mathematik; gestorben 1752 in Bagnols (Département du Gard).

132. *George Buffon* 1707—1788, Intendant des kgl. Gartens und Naturalienkabinetts zu Paris.

133. **Leonhard Euler,** geboren in Basel 1707, gestorben in Petersburg 1783; Sohn eines Pfarrers, Schüler Johann Bernoulli's; 1725 in Petersburg, 1741 in Berlin, 1766 wieder in Petersburg, wo er ein oder zwei Jahre später erblindete, ohne seine Thätigkeit aufzugeben.

134. *Thomas Simpson* 1710—1761, Professor der Mathematik zu Woolwich.

135. *Jean Paul de Gua* 1713—1785, gestorben in Paris.

136. *Alexis Claude Clairaut* 1713—1765 in Paris.

137. *Abraham Gotthelf Kästner,* geboren 1714 zu Leipzig, 1739 bis 1756 Lehrer an der dortigen Universität, 1756—1800 Professor der Mathematik und Physik in Göttingen.

138. *Jean-le-Rond* **D'Alembert** 1717—1783 in Paris.

139. *Matthew Stewart,* geboren 1717, gestorben 1785 in Edinburgh.

140. *John Landen,* geboren 1719 bei Peterborough, gestorben 1790 zu Milton.

140a. *Albrecht Meister,* geboren 1724 zu Weikersheim (Hohenlohe), gestorben 1788 als Professor in Göttingen.

141. **Johann Heinrich Lambert,** geboren 1728 zu Mühlhausen im Elsass, arbeitete sich aus drückenden Verhältnissen empor; seit 1765 Oberbaurat und Mitglied der Akademie in Berlin, wo er 1777 starb.

142. *Etienne Bézout,* geboren 1730, gestorben 1783 in Paris.

143. *Giovanni Francesco Guiseppe Malfatti,* geboren 1731 zu Ala, gestorben 1807 als Professor der Mathematik an der Universität Ferrara.

144. ~~*Charles Auguste*~~ *Vandermonde* 1735—1796 in Paris, Direktor des Conservatoire pour les arts et métiers.

145. *Christof Friedrich von Pfleiderer,* geboren 1736 in Kirchheim u. Teck, gestorben 1821 in Tübingen; 1766—1782 Professor der Mathematik und Physik an der Militärakademie zu Warschau, dann in der gleichen Eigenschaft Professor in Tübingen.

146. **Joseph Louis Lagrange,** geboren in Turin 1736, gestorben in Paris 1813; 1758 gründete er die Turiner Akademie; von 1766 an war er zwanzig Jahre in Berlin; 1787 kehrte er nach Paris zurück und wurde 1797 Lehrer an der Ecole polytechnique.

147. *Jacques-André Mallet,* geboren 1740 in Genf, Professor der Astronomie, starb 1790 dort.

148. *Karl Friedrich Hindenburg,* geboren 1741 zu Dresden, gestorben 1808 als Professor an der Universität Leipzig.

149. *Jean Antoine Condorcet,* geboren zu Ribemont (Picardie) 1743, vergiftete sich 1794 im Gefängnis.

150. *Johann Friedrich Pfaff,* geboren 1765 in Stuttgart, vollendete seine Studien in Göttingen und später bei dem Astronom Bode in Berlin; 1789 Professor der Astronomie in Helmstädt; gestorben 1825 als Professor in Halle.

151. *Wilhelm Eschenbach,* geboren 1764 in Leipzig, gestorben 1797 zu Madras als englischer Kriegsgefangener.

152. *William Wallace,* geboren 1768, gestorben 1843 als Professor der Mathematik an der Universität zu Edinburgh.

152a. *Jean-Baptiste Maria Meusnier,* geboren 1754 zu Paris, gefallen 1793 als Divisionsgeneral bei der Verteidigung von Kassel gegen die Preussen.

153. *Heinrich August Rothe,* geboren 1773 zu Dresden, gestorben 1842 als Professor in Erlangen.

154. **Gaspard Monge,** geboren 1746, gestorben 1818 in Paris.

155. *Jean Trembley,* geboren 1649 in Genf, gestorben 1811.

156. **Pierre Simon Laplace,** geboren in der Normandie 1749, gestorben in Paris 1827.

157. *Simon Antoine Jean Lhuilier,* geboren in Genf 1750, gestorben 1840; studierte in Warschau und Tübingen bei Pfleiderer, seit 1796 Professor an der Akademie in Genf.

158. **Andrien Marie Legendre**, geboren in Toulouse 1752; 1795 Professor an der Ecole normale in Paris; gestorben 1833.

159. *Nicolas Carnot,* geboren in Nolay 1753, gestorben im Exil in Magdeburg 1823. 68 13

u. Robert 160. ~~Aimé~~ *Argand*, geboren in Genf 1755, gestorben 1800.

161. *Louis Arbogaste*, geboren in Genf ~~1749~~, gestorben ~~1811~~. 1759–1803

162. *Lacroix* 1765—1843.

163. *James Jvory,* geboren in Dundee 1765, gestorben 1845.

164. **Jean Baptiste Joseph Fourier,** geboren in Auxerre 1768, gestorben in Paris 1830.

165. *Jean Nicolas Pierre Hachette,* geboren 1769, gestorben in Paris 1834.

166. *Karl Brandan Mollweide,* geboren 1774 in Wolfenbüttel, gestorben 1825 als Professor der Mathematik in Leipzig.

167. *Etienne Louis Malus* 1775—1812, Paris. Erst Offizier, dann Examinator an der polytechnischen Schule.

168. *Zecchini Leonelli,* geboren 1776 in Cremona, gestorben 1847 als Direktor des physikalischen Kabinetts in Corfu.

169. *Sophie Germain* 1776—1831 in Paris.

170. *Wolfgang Bolyai de Bolya,* geboren 1775 zu Bolya im Szeklerland in Siebenbürgen, kam 1797 nach Jena, später nach Göttingen, wo er mit Gauss einen dauernden Freundschaftsbund schloss; 1802 Professor der Mathematik zu Maros-Vásárhely; er dichtete fünf Trauerspiele, verfasste aber auch zahlreiche mathematische Abhandlungen, unter denen die wichtigste: »Tentamen Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae etc.«, 1832 und 1833 in zwei Bänden erschienen. Bolya trat 1849 in den Ruhestand und starb 1856.

171. **Karl Friedrich Gauss**, geboren den 30. April 1777 zu Braunschweig. Er besuchte von 1788—1792 das Gymnasium, wo Herzog Karl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig auf ihn aufmerksam wurde und in Folge davon den talentvollen Schüler von 1792—1795 im Collegium Carolinum ausbilden liess. Die Universität Göttingen besuchte er 1795—1798, kehrte dann nach Braunschweig zurück, von wo aus er die Helmstädter Bibliothek benützte und in Verkehr mit Johann Friedrich Pfaff trat. Sein berühmtes Werk: »Disquisitiones arithmeticae«, erschien 1801. Als besonders grundlegende Abhandlungen sind noch hervorzuheben: »Theoria motus corporum coelestium etc.« von 1809, »Disquisitiones generales circa seriem inf.« von 1812,

»Disquisitiones generales circa superficies curvas« von 1827, »Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie« von 1843 und 1846. Gauss starb am 23. Februar 1855 in Göttingen.

172. **Siméon Denis Poisson,** geboren 1781, gestorben 1840 in Paris.

173. *Charles Dupin,* geboren 1781 zu Varzy, gestorben 1873 in Paris.

174. *Charles Julien Brianchon,* geboren 1785; französischer Artillerieoffizier.

175. *Jean Victor Poncelet,* geb. 1788 in Metz, gest. 1867 in Paris.

176. **Augustin Louis Cauchy** 1789—1857 in Paris.

177. **August Ferdinand Möbius,** geboren 1790, seit 1816 Professor der Astronomie in Leipzig, wo er 1868 starb.

178. *Ephraim Salomon Unger,* geboren 1788 zu Coswig in Anhalt, gestorben 1870 als Professor an der Realschule zu Erfurt.

179. *Bernhard Bolzano,* Weltpriester und Professor in Prag, 1781—1848.

180. *Amadeo Plana,* geb. 1781 zu Voghera, gest. 1864 zu Turin.

181. *Friedrich Christian von Riesse,* geboren 1790 zu Consfeld, gestorben 1868 als Professor in Bonn.

182. *Charles Babbage,* 1792—1871, Professor in Cambridge.

183. **Michel Chasles,** geboren 1793 zu Chartres, gestorben 1880 als Professor an der Sorbonne zu Paris.

184. *Joh. Jos. Ign. von Hoffmann,* geboren zu Mainz 1777, seit 1806 Professor in Aschaffenburg, wo er 1866 starb.

185. *August Leopold Crelle,* geboren 1780 in Eichwerder (Wriezen a. d. Oder), gestorben 1855. Begründer des Journals für reine und angewandte Mathematik (1826).

186. *Friedrich Schwerd,* geboren 1792 in Rheinhessen, 1817 Professor in Speyer, gestorben 1871.

187. *Théodore Olivier* 1793—1853. Professor der Geometrie am Conservatoire des arts-et-métiers.

188. *N. J. Lobatschewsky,* geboren 1793 zu Makarief im Bezirk Nischni-Nowgorod, 1802 Schüler des Gymnasiums zu Kasan; 1827—1846 Professor und Rektor der Universität Kasan; gestorben 1856.

189. **Gabriel Lamé,** geboren 1795 in Tours, gestorben 1870 in Paris.

190. *Geminiano Riccardi,* geboren 1794 zu Modena, starb dort 1857 als Professor an der Universität.

191. *A. J. H. Vincent,* geboren 1797, gestorben 1868 in Paris.

192. *Ernst Ferdinand August,* geboren 1795 zu Prenzlau, gestorben 1870 als Direktor des Köllnischen Realgymnasiums in Berlin.

193. **Jakob Steiner,** geboren am 18. März 1796 in Utzendorf bei Solothurn, lernte erst im 14. Jahr schreiben, besuchte Pestalozzi's

Erziehungsanstalt zu Iferten und studierte von 1818—1821 in Heidelberg; dann wurde er Privatlehrer in Berlin, wo die beiden Humboldt ihn in die Berliner Gelehrtenwelt einführten. Jakobi verschaffte ihm 1834 eine ausserordentliche Professur an der Universität Berlin. Steiner starb am 1. April 1863 in Bern.

194. **Julius Plücker,** geboren 1801 in Elberfeld; 1826 in Bonn, 1834 in Halle, von 1836 an wieder in Bonn. Bis 1846 arbeitete er auf mathematischem Gebiet, dann als Physiker, um in den letzten Jahren seines Lebens wieder zur Mathematik zurückzukehren. Er starb 1868 in Bonn.

195. **Niels Henrik Abel,** geboren den 5. August 1802 in Norwegen. Er studierte in Christiania und hielt sich sodann, auf einer wissenschaftlichen Reise begriffen, sechs Monate in Berlin und zehn Monate in Paris auf, von wo er wieder zunächst nach Berlin, und dann nach Christiania zurückkehrte. Während die Nachricht von seiner Berufung an die Universität Berlin unterwegs war, starb er am 6. April 1829.

196. *Charles François Sturm,* geboren in Genf 1803, gestorben 1855 als Lehrer an der polytechnischen Schule in Paris.

197. **Karl Gustav Jakob Jacobi,** geboren am 10. Dezember 1804 in Potsdam, lehrte schon in seinem 21. Jahr an der Berliner Universität, wurde 1827 nach Königsberg berufen und lebte, durch körperliches Leiden veranlasst, von 1843 ab im Ruhestand in Berlin, wo er am 18. Februar 1851 starb.

198. **Gustav Peter Lejeune-Dirichlet,** geboren am 13. Februar 1805 zu Düren in der Rheinprovinz, vollendete seine mathematische Ausbildung von 1822 an in Paris, kehrte 1826 nach Deutschland zurück und wurde durch Alexander von Humboldt's Vermittlung an die Universität Breslau berufen. Doch trat er schon zwei Jahre später in den Lehrkörper der Berliner Universität ein, dem er 27 Jahre angehörte. Im Herbst des Jahres 1855 wurde er der Nachfolger von Gauss in Göttingen, wo er am 5. Mai 1859 starb.

199. *Joseph Plateau,* geboren zu Brüssel 1801, gestorben als Professor der Physik zu Gent 1883; im Jahr 1843 erblindete er und hielt von da ab keine Vorlesungen mehr.

200. *Ludwig Oettinger,* geboren 1797 zu Edelfingen bei Mergentheim, gestorben 1869 als Professor in Freiburg.

201. *Johann August Grunert,* geboren 1797 zu Halle a. S., seit 1833 Professor in Greifswalde, gestorben 1872.

202. *Jean Marie Constant Duhamel,* geboren 1797 zu St. Malo, gestorben 1872 in Paris.

203. *L. A. Jaques Quetelet,* geboren 1796 zu Gent, gestorben 1874 zu Brüssel, als Direktor der Sternwarte.

204. *Karl Heinrich Graeffe,* geboren 1799 zu Braunschweig, erst Juwelier, studierte dann 1826 in Zürich, starb dort 1873 als Professor an der polytechnischen Schule.

205. *Adhémar Jean Claude de Saint-Venant,* geboren 1797, gestorben 1886 zu Vendôme.

206. *Johann Bolyai de Bolya,* Sohn des Wolfgang Bolyai, geboren 1802 zu Klausenburg in Siebenbürgen, ein tiefdenkender Mathematiker, leidenschaftlicher Violinspieler und geschickter Fechter; er starb 1860 zu Maros-Vásárhely als K. K. Hauptmann im Geniekorps.

207. **Karl Georg Christian von Staudt,** geboren 1798 in Rothenburg an der Tauber, gestorben 1867 als Professor in Erlangen.

208. *Karl Wilhelm Feuerbach,* geboren 1800 zu Jena, gestorben 1834 als Professor der Mathematik am Gymnasium in Erlangen.

209. *Heinrich Ferdinand Scherk,* geboren 1798 in Posen, gestorben 1885 in Bremen.

210. *Gustave Froment,* gestorben 1865 in Paris.

211. *Domenico Chelini,* geboren 1802 zu Gragnano, gestorben 1878 als Professor in Rom.

212. *Friedrich Eduard Thieme,* geboren 1805 zu Leipzig, gestorben 1878 zu Plauen.

213. *Jean Baptiste Brasseur* 1802—1868, Professor zu Lüttich.

214. Graf *Libri-Carucci della Sommaja,* geboren 1802 in Florenz, gestorben 1869 zu Fiesole.

215. *Giusto Bellavitis,* geb. 1803 zu Bassano, gest. 1880 in Padua.

216. *Ernst Wilhelm Grebe,* geboren 1804 bei Marbach in Oberhessen, gestorben 1874 in Cassel.

217. **Sir William Rowan Hamilton** 1805—1865 in Dublin.

218. *August de Morgan,* geb. in Madras 1806, gest. in London 1871.

219. *James Booth,* geboren 1806, gestorben 1878 in Buckinghamshire.

220. *Joseph Liouville,* 1806—1882; Professor an der polytechnischen Schule in Paris.

221. *Hermann Günter Grassmann,* geboren in Stettin 1809, gestorben 1877 als Professor der Mathematik am Gymnasium in Stettin.

222. *James Mac Cullagh,* geboren 1809, gestorben 1846 in Dublin.

223. *Evariste Galois,* geb. 1811, gefallen im Duell 1832 zu Paris.

224. **Ludwig Otto Hesse,** geboren in Königsberg 1811, gestorben 1874 zu München als Professor an der polytechnischen Schule.

225. *Adolf Göpel,* geboren 1812 in Rostok, gestorben 1847 in Berlin, Lehrer am Werder-Gymnasium.

226. *J. de la Gournerie,* geboren 1814, gestorben 1833 in Paris. Von 1849 ab Lehrer der darstellenden Geometrie an der Ecole polyt.

227. *George Boole*, geboren 1815, gestorben in Cork 1864.

228. *François Joseph Lionnet* 1805—1884 in Paris.

229. *Barnaba Tortolini* 1808—1874, Professor an der Sapienza in Rom.

230. *Karl Anton Bretschneider*, geboren 1808 zu Schneeberg im Erzgebirge, gestorben 1878 in Gotha.

231. *Karl Gustav Reuschle*, geboren 1812 zu Mehrstetten (Württemberg), gestorben 1875 als Professor am Gymnasium in Stuttgart.

232. *F. S. Richelot*, geboren 1808 in Königsberg, gestorben 1875 als Professor dort.

233. *Christian von Frisch*, 1807—1881 in Stuttgart, Oberstudienrat und Rektor der Realschule dort.

234. *Eduard Heis*, geboren 1806 zu Köln, gestorben 1877 als Professor der Astronomie zu Münster.

235. *Bernhard von Gugler*, geboren 1812 zu Nürnberg, gestorben 1880 als Professor am Polytechnikum in Stuttgart.

236. *Joseph Alfred Serret*, geboren 1819 in Paris, gestorben 1885 als Professor an der Sorbonne.

237. *August Wiegand* 1814—1871, Lehrer der Mathematik an der Realschule zu Halle.

238. *Karl Johann Malmsten*, geboren 1814 zu Uddetorp in Schweden, gestorben 1886 zu Upsala.

239. *Jean Claude Bouquet* 1819—1885 in Paris.

240. *Jules Jamin*, geboren 1818, gestorben 1886 in Paris.

241. *Savino Realis* 1818—1886 in Turin.

242. *F. Cattaneo*, gestorben 1873 als Rektor der Universität Pavia.

243. *Karl Wilhelm Borchardt*, 1817—1880 in Berlin, gestorben als Professor an der Universität.

244. *Benjamin Peirce*, gestorben 1880 zu Cambridge (Massachusetts).

245. *Eduard Simon Heine*, geboren 1821 in Berlin, gestorben 1881 als Professor in Halle.

246. *Albert Briot*, geboren 1817 zu Sainte-Hippolyte, gestorben 1882 als Professor an der Sorbonne in Paris.

247. *Ernest Quetelet*, geb. 1826 zu Brüssel, gest. 1878 zu Ixelles.

248. *Gottfried Friedlein*, geboren 1828 zu Regensburg, gestorben 1875 in Hof als Rektor der Studienanstalt.

249. *Franz Woepcke*, geboren zu Dessau 1826, gestorben 1864 in Paris.

250. *Paul Du Bois-Reymond*, geboren 1831 in Berlin, gestorben 1889 als Professor an der polytechnischen Schule in Charlottenburg.

251. **Georg Friedrich Bernhard Riemann**, geboren 1826 in Breselenz (Lüneburger Heide), trat in Beziehung zu Gauss, Jacobi, Dirichlet, Steiner; 1858 Prof. in Göttingen, starb 1866 zu Selasca am Lago Maggiore

252. *Wilhelm Unverzagt,* geboren 1830 zu Bad Ems, gestorben 1885 in Wiesbaden.

253. *Alfred Enneper*, geboren 1830, gestorben 1885 als Professor in Göttingen.

254. *Pietro Boschi,* geboren 1833 zu Rom, gestorben 1887 als Professor an der technischen Hochschule in Bologna.

255. *Emile Bour,* geboren 1831, gestorben 1866 in Paris als Professor an der polytechnischen Schule.

256. *Gustav Roch*, Professor in Halle, gestorben 1866 in Venedig.

257. *Karl Hattendorf*, geboren 1834, gestorben 1882 als Professor am Polytechnikum zu Aachen.

258. *William Spottiswoode* 1825—1883 in London.

259. *Ferdinand Gotthold Eisenstein* 1823—1852 in Berlin.

260. *Henry Smith,* geboren in London 1826, gestorben in Oxford als Professor der Geometrie 1883.

261. **Rudolf Friedrich Alfred Clebsch,** geboren 1833 zu Königsberg in Preussen, sudierte dort unter Neumann, Richelot und Hesse; 1858 Professor in Karlsruhe, 1863 in Giessen, 1868 in Göttingen, wo er 1872 starb.

262. *Edmond Laguerre,* geb. zu Bar-le-Duc 1834, gest. 1886 in Paris.

263. *Hermann Hankel*, geboren 1839 zu Halle, gestorben 1873 in Schramberg als Professor an der Universität Tübingen.

264. *G. H. Halphén,* geboren in Rouen 1844, seit 1873 an der polytechnischen Schule in Paris, gestorben 1889.

265. *Carlo Alberto Castigliano,* Ingenieur der oberitalienischen Eisenbahnen; 1847—1884.

266. *Karl Gustav Axel Harnack,* geboren 1851 in Dorpat, gestorben 1888 als Professor am Polytechnikum in Dresden.

267. *Ettore Caporali,* geb. 1855 zu Perugia, gest. 1886 zu Neapel.

268. *Ludwig Kraus,* geboren 1857 zu Turnau in Böhmen, gestorben 1886 zu Arco.

269. *Ludwig Scheefer,* geb. in Königsberg 1859, gest. in München 1885.

270. *Heinrich Richard Baltzer,* geboren 1818, gestorben 1887 als Professor in Giessen.

271. *Johann Georg Rosenhain,* geboren 1816, gestorben 1887 als Professor in Königsberg.

272. *Karl Snell,* geboren 1806 zu Dachsenhausen, gestorben 1887 als Professor zu Jena.

I. Mathematiker der Gegenwart, welche an deutschen oder ausländischen Hochschulen wirken oder als Schriftsteller thätig sind.

(Die beigesetzte Zahl, z. B. 15, bezeichnet das Geburtsjahr, z. B. 1815; der Ort den gegenwärtigen Aufenthalt.)

Adams, W. London.
Affolter, Fr. G. Zürich. 1.
Amstein, H. Lausanne.
Appell, Paris.
August, Berlin.

Bachmann, P. 37. Münster.
Battaglini, Neapel.
Bauer, G. 20. München.
Baur, C. W. v. 20. Stuttgart.
Beltrami, E. 35. Pavia.
Bertrand, Paris.
Betti, Pisa.
Bertini, Pavia.
Biehler, Paris.
Bjerknes, C. A. 25. Christiania.
Biermann, O. 58. Prag.
Björling, Lund.
Bobek, K. Prag.
Böklen, O. Reutlingen.
Bolza, O. ~~Freiburg i. Br.~~
Boncompagni, B. Rom.
Bonnet, Paris.
Boussinesq, Paris.
Braunmühl, A. v. München.
Brill, A. 42. Tübingen.
Brioschi, E. Mailand.
Brisse, Ch. Courbevoie (Seine).
Brocard, H. Monpellier.
Bruns, H. 48. Leipzig.
Burmester, L. München.

Cantor, G. 45. Halle.
Cantor, M. 29. Heidelberg.
Capelli, A. Neapel.
Caspary, F. Berlin.
Casey, Dublin.
Casorati, F. 35. Pavia.
Catalan, Liège.
Cayley, A. 21. Cambridge.
Christoffel, E. B. 29. Strassburg.
Cranz, C. Stuttgart.
Craig, T. Baltimore.
Cremona, Rom.
Curtze, M. Thorn. Königl. Gymna
Czuber, E. 51. Brünn.

Darboux. 42. Paris.
Dedekind, R. Braunschweig.
Dingeldey, Fr. Darmstadt.
Drach, C. A. v. 39. Marburg.
Durège, H. 21. Prag.
Dyck, W. München.

Engel, F. 61. Leipzig.
Eneström. Stockholm.
Escherich, G. v. 49. Wien.

Favaro, Padua.
Fiedler, O. W. 32. Zürich.
Finsterwalder, S. München.
Folie, Brüssel.
Fouret, Paris.
Fricke, R. Braunschweig.
Frege, Jena.
Frischauf, J. 37. Graz.
Frobenius, F. G. Zürich.
Fuchs, L. 35. Berlin.
Fuhrmann, Königsberg.

Gegenbauer, L. Innsbruck.
Geiser, C. F. Zürich.
Gibson, Glasgow.
Gierster, J. München.
Gilbert, Louvain.
Glaisher, Cambridge.
Gundelfinger, S. Darmstadt.
Günther, S. 48. München.
Gordan, P. 37. Erlangen.
Goursat, E. 58. Paris.
Graefe, F. Darmstadt.
Gram, Kopenhagen.
Grünwald, Prag.
Guccia, Palermo.
Gylden, Stockholm.

Hamburger, M. Berlin.
Hammer, E. Stuttgart.
Hauck, G. Berlin.
Hart, H. Blackheath.
Haton de la Goupillière, Paris.
Hazzikadis, Athen.
Heffter, L. Berlin.
Heger, R.
Heiberg, J. L. Kopenhagen.
Helmholtz, H. v. 21. Berlin.
Henneberg, Darmstadt.
Hensel, 60. Berlin.
Henoch, Berlin.
Hermite, C. 22. Paris.
Hess, A. E. 43. Marburg.
Hess, W. Bamberg.
Hettner, G. 54. Berlin.
Hilbert, D. 62. Königsberg.
Hirst, London.
Hoffmann, J. C. V. Leipzig.
Hölder, O. 59. Tübingen.
Holst, Christiania.
Holzmüller, G. Hagen.
Hoppe, R. 16. Berlin.
Humbert, Paris.
Hurwitz, A. 59. Königsberg.

Jolles, Aachen.
Jonquières, Paris.
Jordan, C. Paris.
Joubert, Angers.
Isenkrahe, C. Bonn.
Jung, Mailand.
Jürgens, Aachen.

Kantor, S. Prag.
Kiepert, L. Hannover.
Killing, W. 47. Braunsberg.
Kinkelin, H. 32. Basel.
Klein, B. 38. Marburg.
Klein, F. 49. Göttingen.
Kneser, A. Breslau.
Knoblauch, J. 55. Berlin.
König, J. Budapest.
Koenigs, Paris.
Königsberger, L. 37. Heidelberg.
Korkine, A. N. Petersburg.
Kortum, H. 36. Bonn.
Kötter, E. 59. Berlin.
Kötter, F. Berlin.
Kowalevski, Sofie. 58. Stockholm.
Krause, M. Dresden.
Krazer, H. 58. Strassburg.
Krey, H. Freiburg i. B.
Kronecker, L. 23. Berlin.
Kummer, E. E. 10. Berlin.

Lampe, Berlin.
Laurent, Paris.
Laska, W. Prag.
Lazarus, Hamburg.
Léauté, Paris.
Le Paige, Liège.
Lévy, M. Paris.
Lie, S. Leipzig.

Lieber, H. Stettin.
Liguine, Odessa.
Lindelöf, L. L. 27. Helsingfors.
Lindemann, F. Königsberg.
Lippich, F. 38. Prag.
Lipschitz, R. 32. Bonn.
London, F. Breslau.
Loria, G. 62. Genua.
Lorberg, Strassburg.
Lucas, E. Paris.
Lüroth, J. 44. Freiburg.

Maisano, Messina.
v. *Mangoldt*, H. Aachen.
Mannheim, A. Paris.
Mansion, P. Brüssel.
Marie, M. Paris.
Markoff, A. Petersburg.
Matthiessen, L. 30. Rostok.
Maurer, L. Strassburg.
Mayer, A. 39. Leipzig.
Maynz, Ludwigslust.
Mehmke, R. Darmstadt.
Meissel, Kiel.
Mellin, Helsingfors.
Mertens, F. Graz.
Meyer, F. Clausthal.
Michaelis, Berlin.
Migotti, Czernowitz.
Milinowski, Weissenburg.
Minkowski, H. 64. Bonn.
Minnigerode, 37. Greifswald.
Mittag-Leffler, 46. Stockholm.
Molien, Dorpat.
Moutard, Paris.
Müller, F. Berlin.
Müller, H. Metz.

Netto, E. 46. Giessen.
Neumann, C. 32. Leipzig.
Nöther, M. 44. Erlangen.

d'Ocagne, Cherbourg.
d'Ovidio, E. Turin.

Paolis, Pisa.
Papperitz, E. Dresden.
Pasch, M. 43. Giessen.
Perrin, Mans.
Peschka, G. A. v. 36. Brünn.
Petersen, J. Kopenhagen.
Pezzo, Neapel.
Picard, C. E. 56. Paris.
Pick, G. Prag.
Piltz, Jena.
Pincherle, S. Bologna.
Pochhammer, L. 41. Kiel.
Poincaré, H. 54. Paris.
Pringsheim, A. 50. München.
Prym, F. 41. Würzburg.

Rausenberger, O. Frankfurt a. M.
Rayléigh, Lord, Witham (Essex).
Reiff, R. Heilbronn.
Resal, H. Paris.
Reuschle, Stuttgart.
Reye, Th. 38. Strassburg.
Ribaucour, Philippeville (Algier).
Roberts, S. London.
Roberts, S. O. Newcastle-on-Tyne.
Roberts, W. R. W. Dublin.
Rodenberg, C. Hannover.
Rohn, K. Dresden.
Rosanes, J. 42. Breslau.
Rosochatius, Berlin.
Roth, 45. Strassburg.
Rudio, F. Zürich.
Runge, Hannover.

Saalschütz, 35. Königsberg.
Salmon, 19. Dublin.
Schäffer, H. 24. Jena.
Schell, W. Karlsruhe.

Scheibner, W. 26. Leipzig.
Schering, E. 33. Göttingen.
Schläfli, L. 18. Bern.
Schlegel, V. Hagen.
Schlesinger, O. Berlin.
Schlömilch, O. Dresden.
Schönflies, A. Göttingen.
Schönholzer, Bern.
Schottky, Zürich.
Schröder, E. Karlsruhe.
Schröter, H. 29. Breslau.
Schubert, H. 48. Hamburg.
Schumann, Berlin.
Schur, F. 56. Dorpat.
Schwarz, H. A. Göttingen.
Schwering, K. Coesfeld.
Segre, C. Turin.
Seidel, Th. L. v. 21. München.
Selling, E. 34. Würzburg.
Simon, H. Strassburg.
Sonine, N. Warschau.
Stahl, H. 43. Tübingen.
Stahl, W. Aachen.
Staude, O. 57. Rostock.
Staudigl, R. Wien.
Stephanos, C. Athen.
Stern, M. A. Bonn.
Stickelberger, L. Freiburg i. Br.
Stoll, Bensheim.
Stolz, O. 42. Innsbruck.
Stroh, E. München.
Studnicka, Prag.
Study, E. Marburg.
Sturm, R. 41. Münster.
Sylow, Friedrichshald.
Sylvester, J. J. 14. Oxford.

Tannery, P. Bordeaux.
Tchebycheff, P. 21. Petersburg.
Teixeira, Porto.
Thieme, H. Posen.
Thomae, J. 40. Jena.
Thomé, W. 41. Greifswald.
Toeplitz, Breslau.
Treutlein, Karlsruhe.
Unferdinger, Brünn.
Unger, F. Leipzig-Reudnitz.

Valentiner, H. 50. Kopenhagen.
Veronese, Padua.
Voigt, W. Göttingen.
Von der Mühll, K. Basel.
Voss, A. München.

Wälsch, Prag.
Wangerin, A. Halle.
Wassilieff, Kasan.
Weber, H. 42. Marburg.
Wedekind, L. Karlsruhe.
Weier, E. 18. Kiel.
Weierstrass, C. 15. Berlin.
Weiss, W. Prag.
Weltzien, C. Berlin.
Weiler, A. Zürich.
Weingarten, 36. Berlin.
Weinmeister, Ph. Tharandt.
Weissenborn, H.
Weyr, Em. 48. Wien.
Weyr, Ed. Prag.
Wiener, Ch. Karlsruhe.
Wiener, H. 57. Halle.
Wiltheiss, Halle a. S.
Winckler, A. Wien.
Wolf, Zürich.
Wolfskehl, P. Darmstadt.

Zech, P. Stuttgart.
Zeller, Markgröningen.
Zeuthen, H. G. 39. Kopenhagen.
Zolotareff, Petersburg.

VII. Litteraturverzeichnis,
auf welches sich die Hinweise des Buches beziehen.

(Die in grösserem Umfang benützten Aufsätze und Werke sind mit * oder ** bezeichnet.)

1. *Anton*, Geschichte des isoperimetrischen Problems. 1888.

*2. *Bachmann*, Die Lehre von der Kreisteilung. 1872.

2a. *Ball*, A short history of Mathematics. 1888.

3. *Balsam*, Des Apollonius von Pergä sieben Bücher über Kegelschnitte. 1861.

4. *Baltzer*, Einführung der komplexen Zahlen. Kronecker, Journ., Bd. 94.

4a. *Baltzer*, Theorie und Anwendung der Determinanten. 1881.

*5. *Baltzer*, Die Elemente der Mathematik. 1885.

5a. *Baltzer*, Analytische Geometrie. 1882.

6. *Bauer*, Gedächtnisrede auf O. Hesse. Münchner Abh. 1882.

*7. *Baumgart*, Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz. Schlömilch, Zeitschrift, Bd. 30, historisch-litterarische Abteilung.

8. *Binder*, Das Malfatti'sche Problem. Programm Schönthal 1868.

9. *Böhmer*, Ueber die Cissoide des Diokles. 1874.

10. *Bretschneider*, Die Geometrie und die Geometer vor Euklid. 1870.

11. *Brill*, A. Ueber das elfte Axiom des Euklid. 1883. (Handschriftlich eingesehen).

12. *Brill*, A. Das mathematisch-physikalische Seminar in Tübingen. Aus der Festschrift der Universität zum Königs-Jubiläum 1889.

*13. *Brill*, A. Antrittsrede in Tübingen. 1884. (Handschr. einges.)

*14. *Brill*, A. Ueber die Modellsammlung des mathematischen Seminars der Universität Tübingen. 1886. Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen von O. Böklen. 1887.

15. *Cantor*, G. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Ann. Bd. 5.

**16. *Cantor*, M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I. 1880.

17. *Cantor*, M. Mathematische Kulturbilder.

18. *Cayley*, A. On multiple algebra. Quaterly Journal of Math. 1887.

18a. *Cayley*, A. Address to the British Association etc. 1883.

**19. *Chasles*, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. 1875.

*20. *Clebsch*, Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen von einigen seiner Freunde (Brill, Gordan, Klein, Lüroth, A. Mayer, Nöther, Von der Mühll). Math. Ann., Bd. 7.

21. *Clebsch*, Zum Gedächtnis an Julius Plücker. Abh. der Göttinger Akademie, Bd. 16.

22. *Cohen*, Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte. 1889.

23. De *Lagarde*, Woher stammt das x der Mathematiker? Göttinger Nachr. 1882.

*24. *Dedekind*, Stetigkeit und irrationale Zahlen. 1872.

25. *Dedekind*, Was sind und was sollen die Zahlen? 1888.

*26. *Dirichlet*, Gedächtnisrede auf Jacobi. Crelle, J., Bd. 52.

*27. *Dürer*, »Vnderweysung der messung | mit dem zirckel vn richtscheyt | in Linien ebnen vnnd gantzen corporen | durch Albrecht Dürer zusamen getzogn | vnd zu nutz alln kunstlieb habenden mit zu gehörigen figuren | in truck gebracht | im jar MDXXV«. (Besteht aus »vier Büchlein«.)

28. *Enneper*, Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte. 1876.

28a. *Ermann*, Aegypten und ägyptisches Leben im Altertum. 1885.

29. *Faà di Bruno*, Einleitung in die Theorie der binären Formen. Deutsch von T. Walter. 1881.

30. *Friedlein*, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. 1869.

*31. *Gerhardt*, Geschichte der Mathematik in Deutschland. 1877.

32. *German*, Das irreguläre Siebeneck des Ulmer Mathematikers Joh. Faulhaber. 1876.

33. *Giesing*, Leben und Schriften Leonardo's da Pisa. 1886.

34. *Graeffe*, Die Geschichte der Variationsrechnung vom Ursprung der Differential- und Integralrechnung bis auf die heutige Zeit. 1825.

35. *Grassmann*, Die Ausdehnungslehre von 1844 oder die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. 2. Auflage, 1878.

36. *Günther*, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. 1876.

37. *Günther*, Zur mathematischen Theorie des Schachbretts. Grunert Arch. Bd. 56.

38. *Günther*, Zur Geschichte der deutschen Mathematik im 15. Jahrhundert. Schlömilch Z. XX. Hl.

39. *Günther*. Ueber magische Quadrate. Grunert, Arch. Bd. 57.

40. *Günther*, Die geometrischen Näherungskonstruktionen Albrecht Dürer's. 1886.

41. *Günther*, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche. 1872.

*42. *Günther*, Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahr 1525. 1887.

43. *Günther*, Winkelteilung, speziell Trisektion. 1877.

44. *Hamilton*, Elements of quaternions. 1866.

45. *Hammer*, Lehrbuch der ebenen und sphär. Trigonometrie. 1885.

46. *Hankel*, Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. 1869.

**47. *Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. 1874.

48. *Hankel*, Die Elemente der projektivischen Geometrie in synthetischer Behandlung. 1875.

49. *Hankel*, Die komplexen Zahlen. 1871.

50. *Heiberg*, Einige von Archimedes vorausgesetzte elementare Sätze. Schlömilch Z. Bd. 24. Hl. Abt.

51. *Hoffmann* und *Natani*, Mathematisches Wörterbuch, 1858—1867.

52. *Hoppe*, R. Differentialrechnung. 1865.

53. *Hutzelsieder*, Das Apollonische Taktionsproblem im Raum. 1885.

54. *Isely*, Essai sur l'histoire des mathématiques dans la Suisse française. 1884.

*55. *Karup*, Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung. 1871.

56. *Kästner*, Geschichte der Mathematik. 1796—1800.

*57. *Klein*, F. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. 1872.

*58. *Klein*, F. Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung fünften Grads. 1884.

59. *Klügel*, Mathematisches Wörterbuch. 1803—1808. 1823—1836.

*60. *Königsberger*, Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—1829. 1879.

61. *Kossak*, Die Elemente der Arithmetik. 1872.

*62. *Krummbiegel* und *Amthor*, Das Problema bovinum des Archimedes. Schlömilch Z. Bd. 25. Hl. A.

*63. *Kummer*, Gedächtnisrede auf Lejeune-Dirichlet. Berl. Abh. 1860.

*64. *Légendre*, Zahlentheorie, deutsch von Maser. 1886.

65. *Liagre*, Calcul des probabilités. 1852.

*66. *Libri*, Histoire des sciences mathématiques en Italie depuis la renaissances des lettres jusqu' à la fin du dix-septième siècle. 1838—1841.

67. *Lipschitz*, Lehrbuch der höheren Analysis. 1877.

68. *Lieber*, Ueber die Gegenmittellinie, den Grebe'schen Punkt und den Brocard'schen Kreis. 1886—1888.

*69. *Loria*, Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und ~~jetzigen~~ Entwicklung. Deutsch von Schütte. 1888.

70. *Lüroth*, Zur Erinnerung an Karl Friedrich Gauss. 1877.

*71. *Lüroth*, Rektoratsrede. Freiburg 1889.

72. *Majer*, Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid. 1875.

73. *Majer*, Proklos über die Definitionen bei Euklid. 1881.

74. *Marie*, Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques. 1883—1887.

75. *Martius*, C. G. L. v. Staudt. Grunert Arch. Bd. 49.

**76. *Matthiessen*, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. 1878.

**77. *Montucla*, Histoire des Mathématiques. 1799—1802.

78. *Müller*, Historisch-etymologische Studien über mathematische Terminologie. 1887.

*79. *Netto*, Substitutionentheorie. 1882.

*80. *Noether*, Otto Hesse, Schlömilch Z. Bd. 20. Hl. A.

81. *Ofterdinger*, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts. 1867.

**82. *Ohrtmann* und *Müller*, Fortschritte der Mathematik.

83. *Pfleiderer*, Trigonometrie. 1802.

*84. *Poggendorf*, Biographisch-litterarisches Handwörterbuch. 1862.

85. *Pringsheim*, Allgemeine Theorie der Divergenz und Konvergenz von Reihen mit positiven Gliedern. Math. Annalen XXXV.

*86. *Reiff*, Geschichte der unendlichen Reihen. 1888.

87. *Reye*, Ueber die synthetische Geometrie im Altertum und in der Neuzeit. Rektoratsrede. Strassburg 1886.

88. *Richter*, Adressbuch der Professoren der Universitäten und technischen Hochschulen. 1889.

89. *Rösler*, Die neueren Definitionsformen der irrationalen Zahlen. 1886.

90. *Sachs*, Ueber die Aufgabe des Malfatti, ihre Erweiterungen und Lösungen. 1884.

*91. *Salmon*, Lineare Transformationen. Deutsch von Fiedler. 1877.

92. *Schanz*, Der Kardinal Nikolaus von Cusa als Mathematiker. 1872.

93. *Schlegel*, Ueber Entwicklung und Stand der n-dimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der vier-dimensionalen. 1886.

94. *Schlegel*, System der Raumlehre. 1875.

95. *Serret*, Essai d'une nouvelle méthode etc. 1873.

96. *Schmidt,* Aus dem Leben zweier ungarischen Mathematiker. Grunert Arch. Bd. 48.

97. *Schröder,* Der Operationskreis des Logikcalculs. 1877.

98. *Schröder,* Ueber die formalen Elemente der absoluten Algebra. 1874.

99. *Schröder,* Abriss der Arithmetik und Algebra. 1874.

100. *Schubert,* Kalkül der abzählenden Geometrie. 1879.

101. *Schubert,* Die Quadratur des Zirkels. 1889.

102. *Seelhoff,* Geschichte der Faktorentafeln. Hoppe Arch. Bd. 70.

103. *Seelhoff,* Befreundete Zahlen. Hoppe Arch. Bd. 70.

104. *Sonnenburg,* der goldene Schnitt. 1881.

105. *Stahl,* H. Ueber die Behandlung des Jacobi'schen Umkehrproblems der Abel'schen Integrale. 1882.

105a. *Staigmüller,* Lucas Paciuolo, eine biographische Skizze. Schlömilch Z. Bd. 34. Hl. A.

106. *Stifel,* »Arithmetica integra. Authore Michaele Stifelio. Cum praefatione Philippi Melanchtonis. Norimbergae apud Johan. Petreium. Anno Christi MDXLIIII.«

*107. *Stifel,* »Die Coss Christoffs Rudolffs. Mit schönen Exempeln der Coss. Durch Michael Stifel Gebessert vnd sehr gemehrt. . . . . . Gegeben zum Habersten | bei Königsperg in Preussen | den letzten tag dess Herbstmonds | im Jar 1552 . . . . Zu Amsterdam Getruckt bey Wilhelm Janson. Im Jar 1615«.

*108. *Stolz,* Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. 1885. 1886.

109. *Sturm,* Die Entwicklung der Geometrie. Rektoratsrede. Münster 1886.

110. *Suter,* Geschichte der mathematischen Wissenschaften von den ältesten Zeiten bis Ende des 16. Jahrhunderts. 1871.

111. *Suter,* Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters. 1887.

112. *Teige,* Ein Beitrag zur Lebensgeschichte des Magister Joannes de Praga. Schlömilch Z. Bd. 18. Hl. A.

113. *Treutlein,* Das Rechnen im 16. Jahrhundert. Schlömilch Z. Bd. 22. Hl. A.

**114. *Treutlein,* Die deutsche Coss. Schlömilch Z. Bd. 24. Hl. A.

115. *Unger,* Entwicklung der Rechenkunst von ihrem Ursprung bis ins Reformationszeitalter. 1883.

**116. *Unger,* Die Methodik der praktischen Arithmetik. 1888.

117. *Unverzagt,* Ueber die Grundlagen der Rechnung mit Quaternionen. 1881.

118. *Unverzagt*, Theorie der goniometrischen und longimetrischen Quaternionen. 1876.

*119. *Voss*, Karl Friedrich Gauss. 1877.

120. *Weissenborn*, Das Trapez bei Euklid, Heron, Bahmagupta. Schlömilch Z. Bd. 24. Hl. A.

**121. *Wiener*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1884.

*122. *Wittstein*, Geschichte des Malfatti'schen Problems. 1871.

123. *Zangemeister*, Entstehung der römischen Zahlzeichen. Sitzungsberichte der Berliner Ak. 1887.

**124. *Zeuthen*, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Deutsch von v. Fischer-Benzon. 1886.

Register.

Bemerkung: Die in Klammern stehenden Zahlen beziehen sich auf die Nummern der biographischen Notizen.

Abacisten 30.
Abakus 19, 20, 28.
Abbildung 209.
Abel (195).
Abel'sche Funktionen 145.
Abscisse 179.
Abû'l Dschûd (40).
Abû'l Wafâ (39).
Abzählende Geometrie 208.
Additionslogarithmen 231.
Agrippa (56).
Ahmes (1); 1, 14.
Aehnlichkeit 209.
Akademien 88.
Albanna (42).
Albattâni (39).
Alberti (56).
Albirûnî (40).
Alchaijâmî (40).
Alchodschandî (40).
Alchwarizmî (39).
Alcuin (43).
Algebra, Entstehung des Worts 68.
Algebra, ägyptische 59; griechische 59; indische 65; chinesische 67; arabische 68.
Algorithmus 57.
Algorithmiker 30.
Alhazen (41).
Alkalsadî (42).
Alkarchî (40).
Alkindî (40).
Alkûhî (39).
Allgemeine komplexe Zahlen 95.
Almagest 224.
Alnasawî (40).
Analysis situs 218.
Analytische Geometrie 179.
Anharmonisches Verhältnis 203.
Anaxagoras (4).
Anschauungsmittel, geometrische 218.
Antilogarithmen 228.
Apianus (57).
Apices 12, 29.
Apollonius (57).
Aequipollenz 197.
Arbogaste (161).
Archimedes (19).
Archimedische Spirale 164.
Archytas (11).
Argand (160).
Aristoteles (16).
Arithmetisches Dreieck 89.
Aryabhatta (38).
As-Sâgânî (39).
Atelhart (44).
Auflösung algebraischer Gleichungen 119.
August (192).
Ausdehnungslehre 97, 217.
Aeusseres Produkt 98.
Autolykus (17).
Avicenna (40).

Babbage (182).
Bachet (77).

Bacon (45).
Balbus (36).
Baldi (56).
Baltzer (270).
Barlaam (44).
Barozzi (47).
Barrow (103).
Barycentrischer Calcul 196.
Beda (43).
Bellavitis (215).
Benennung der Kegelschnitte 159.
Benennung der Flächen zweiter Ordnung 190.
Bernelinus (43).
Bernoulli (114).
Berührungstransformationen 213, 218.
Bézout (142).
Bhâskara (38).
Billion 37.
Binomischer Lehrsatz 89.
Boëthius (37).
Bolyai (170), (206).
Bolzano (179).
Bombelli (47).
Boole (227).
Booth (219).
Borchardt (243).
Boschi (254).
Bouquet (239).
Bour (255).
Bradwardine (45), 11.
Brahmagupta (38).
Brasseur (213).
Brennpunkt 175.
Bretschneider (230).
Brianchon (174).
Brianchon's Satz (192).
Briggs (64).
Briot (246).
Brocard'sche Gebilde 192.
Brouncker (95).
Brüche, ägyptische 24, griechische 25, römische 25, indische und arabische 26, bei Grammateus 38.
Bruchstrich 32.
Brunelleschi (56).
Buffon (132).
Bürgi (61).

Caporali (267).
Cardano (47).
Cardanische (Tartaglia's) Formel 85.
Carnot (159).
Cassini (96a).
Cassini'sche Linie 189.
Castigliano (265).
Cataldi (47).
Cattaneo (242).
Cauchy (176).
Cavalieri (84).
Céva (111).
Céva's Satz 192.
Chasles (183).
Chelini (211).
Chuquet (50).
Cissoide 165.
Clairaut (136).
Clausberg (128).
Clebsch (261).
Collineation 197.
Computus ecclesiasticus 28, 32.
Conchoide 165.
Condorcet (149).
Coordinaten 179.
Cosinus 228.
Coss 83.
Cotangente 225.
Cotes (124).
Cramer (131).
Cramer'sches Paradoxon 189.
Crelle (185).
Cullagh (222).
Cykloide 186.

D'Alembert (138).
Darstellende Geometrie 204.
De Beaune (88).
De la Gournerie (226).
Delische Aufgabe 162.
Demokritus (6).
Desargues (81).
Descartes (83).
Descartes' Oval 189.
Determinanten 129.
Dezimalbrüche 38.
Dialytische Methode 111.
Differentialgeometrie 210.
Differentialgleichungen 135.
Differential-Invarianten 212.
Differentialrechnung 130.

Dinostratus (15).
Diokles (22).
Diophant (32).
Diorismus 156.
Dirichlet (198).
Discriminante 111.
Distanzpunkt 178.
Division, komplementäre 21, 29. österreichische 37.
Dîwânîziffern 11.
Dualität 196, 198.
Du Bois-Reymond (250).
Duhamel (202).
Duodezimalsystem 25.
Dupin (173).
Dodson (82).
Donatello (56).
Doppelverhältnis 203.
Dreieckszahlen 52.
Dreiteilung des Winkels 161, 162.
Dürer (56).

Ebene Oerter 163.
Einschiebungen 162.
Einteilung des Kreisumfangs 223.
Eisenstein (259).
Elemente Euklid's 154.
Elimination 109.
Elliptische Coordinaten 212.
Elliptische Funktionen 140.
Enneper (253).
Epaphroditus (36).
Eratosthenes (20).
Eschenbach (151).
Eudoxus (13).
Euklid (18).
Euler (133).
Eutokius (35).
Excentricität 175.
Exhaustionsmethode 156.

Fagnano (123).
Faktorentafeln 107.
Faulhaber (62).
Fermat (87).
Ferrari (47).
Ferro (47).
Feuerbach (208).
Feuerbach's Sätze 192.
Fibonacci (47).
Fingerrechnen 5, 19, 20.
Flächenanlegung 61.
Flächen zweiter Ordnung 165.
Fluchtpunkt 177.
Fluxionsrechnung 133.
Formentheoretische Entwicklungen 206.
Fourier (164).
Francesca (56).
Frénicle (90).
Frézier (127).
Friedlein (248).
Frisch (233).
Froment (210).
Frontinus (36).
Fünfeckskonstruktion von Dürer 176.
Funktionentheorie 139.

Galois (223).
Gauss (171).
Geber (42).
Gebrochene Exponenten 89.
Gellibrand (65).
Gemeinvielfaches, kleinstes 27.
Geminus (24).
Geodätische Linien 212, 216.
Geometria situs 218.
Geometrie der Lage 203.
Geometrie von n Dimensionen 217.
Geometrische Reihen 52, 57.
Gerbert (43).
Gerhard (44).
Germain (169).
Geschlecht einer Kurve 207.
Girard 79.
Gleichheitszeichen 82.
Gleichung fünften Grads 127.
Gnomon 50, 152.
Gobarziffern 11.
Goldener Schnitt 174.
Göpel (225).
Gräffe (204).
Grammateus (57).
Grassmann (221).
Grebe (216).
Gregory (107).
Grunert (201).
Grösser- und Kleinerzeichen 89.

Gua (135).
Gudermann (192a).
Gugler (235).
Guldin (74).
Guldin'sche Regel 166, 184.

Hachette (165).
Halley (115).
Halphén (264).
Hamilton (217).
Hankel (263).
Harmonische Proportion 60.
Harnack (266).
Harpedonapten 150.
Harriot (75).
Hattendorf (257).
Heine (245).
Heis (234).
Heron (23).
Hesse (224).
Heteromeke Zahl 52.
Hexagramma mysticum 186.
Hindenburg (148).
Hipparch (22).
Hippias (7).
Hippokrates (8).
Hoffmann (184).
Hochschulen 72.
Hrabanus Maurus (43).
Hudde (101).
Hunain (39).
Huygens (102).
Hyginus (36).
Hypatia (33).
Hypergeometrische Reihe 118.
Hypsikles (22).

Jakobi (197).
Jamblichus (31).
Jamin (240).
Ideale Zahlen 96.
Imaginäre Grössen 78, 94.
Indikatrix 211.
Inneres Produkt 98.
Integralrechnung 135.
Invariantentheorie 111.
Involution 198.
Joannes de Praga (49).
Johannes von Sevilla (44).
Johann von Gmunden (51).
Irrationale Grössen 52, 76, 91.
Isidorus (43).
Isoperimetrisches Problem 138.
Junus (41).
Ivory (163).

Kästner (137).
Kegelschnittslehre des Apollonius 158.
Keilschrift 7.
Keppler (70).
Kerbenrechnung 34.
Kettenbrüche 100.
Kettenlinie 189.
Kinckhuysen (104).
Klasse einer Kurve 196.
Köbel (57).
Kollineation 209.
Kombinatorik 54, 56, 115.
Kombinatorische Schule 115.
Konforme Abbildung 210.
Konoide und Sphäroide des Archimedes 166.
Konstruktion mit einer Zirkelöffnung 176.
Konvergenz und Divergenz der Reihen 117, 118.
Korrespondenzformel 208.
Krafft (130).
Kraus (268).
Kreisteilungsgleichung 123.
Krummlinige Coordinaten 212.
Krümmungsmass 212.
Krümmungstheorie 210.
Kubische Reste 57.
Kurven, algebraische und transcendente 183.

Lacroix (162).
Laguerre (262).
Lagrange (146).
Lahire (108).
Laloubère (86).
Lambert (141).
Lamé (189).
Landen (140).
Lansberg (64a).
Laplace (156).
Lebensversicherung 45.

Legendre (158).
Lehrer-Seminarien 17.
Leibniz (110).
Lemniskate 189.
Leonardo (47).
Leonelli (168).
L'hospital (117).
Lhuilier (157).
Libri (214).
Lineare Oerter 163.
Linie *n*ter Ordnung 183.
Lionnet (228).
Liouville (220).
Lobatschewsky (188).
Logarithmen 229.
Logarithmische Linie 189.
Logikcalcul 99.
Logistik 49.
Loxodrome 191.
Ludolf van Ceylen (68).
Ludolf'sche Zahl 173.

Maclaurin (129).
Magische Quadrate 80.
Magnus (85).
Malfatti (143).
Malfatti'sches Problem 202.
Mallet (147).
Malmsten (238).
Malus (167).
Mass, grösstes gemeinschaftliches 27, 38.
Mästlin (71).
Mathematik 49.
Maurolico (47).
Maximus (44).
Meister (140a).
Megenberg's deutsche Sphära 171.
Menächmus (14).
Menelaus (26).
Mercator (58).
Merkator (97).
Methode der kleinsten Quadrate 114.
Methode der unteilbaren Grössen 184.
Meusnier (152a).
Million 36.
Minimalflächen 211.
Minuszeichen 36, 73, 74.
Minuten 224.
Möbius (177).
Modelle 219.
Moivre (119).
Mollweide (166).
Monge (154).
Montmort (121).
Morgan (218).
Moschopulus (46).
Mûsâ (39).

Napier (63).
Näherungsmethoden zur Lösung von Gleichungen 128.
Negative Exponenten 89.
Negative Grössen 54, 56, 77, 91.
Negative Wurzeln 183.
Neper (63).
Neper'sche Gleichungen 227.
Neunerprobe 27, 32, 33, 36, 58.
Newton (109).
Nichteuklidische Geometrie 213.
Nicole (125).
Nikolaus von Cusa (54).
Nikomachus (28).
Nikomedes (22).
Nipsus (36).
Normalenbündel 213.
Null, Entstehung 9.

Odo (43).
Oettinger (200).
Oinopides (5).
Olivier (187).
Ordinate 179.
Oresme (47).
Oskulation 188.
Osterrechnung 28, 32.
Oughtred (76).

Pacioli (47).
Pangeometrie 214.
Pappus (30).
Parameter 160.
Parent (118).
Pascal (100).
Pascal's Schnecke 189.
Pascal's Theorem 186.
Peirce (244).

Pell (92).
Perseus (22).
Perspektivische Axe und perspektivischer Mittelpunkt 195.
Peurbach (52).
Pfaff (150).
Pfleiderer (145).
Pitiskus (69).
Plana (180).
Plateau (199).
Plato (44).
Platon (10).
Pluszeichen 36, 73, 74.
Plücker (194).
Plücker'sche Formeln 199.
Poisson (172).
Pol und Polare 195.
Polardreieck und Polartetraëder 206.
Poncelet (175).
Potenz 50, 78.
Potenzsatz Newton's 160.
Pothenot'sche Aufgabe 233.
Praktik, welsche 41.
Primzahlen-Tafeln 107.
Prismatoid 193.
Projektion von Steiner 209.
Projektive Geometrie 193.
Proklos (34).
Proportion 83.
Pseudosphären 216.
Ptolemäus (27).
Ptolemäischer Lehrsatz 157.
Punktgruppen 147.
Pyramidalzahlen 52.
Pythagoras (3).
Pythagoräischer Lehrsatz 152.

Quadratische Reste 57.
Quadratrix 152, 190.
Quadratur des Kreises 161, 173.
Quadratwurzel 53.
Quaternionen 98.
Quetelet (203), (247).

Rabattrechnung 42.
Radizieren 35, 56.
Ramus (57).
Raumgeometrie 190.
Raumkurven 190, 208.
Realis (241).
Realschulen 17.
Rechenbrett 19.
Rechenkunst, politische 43.
Rechenstäbe 37.
Rechentafeln 37.
Rechnen: altägyptisches 18, babylonisches 18, griechisches 19, chinesisches 22, indisches 22, arabisches 22, auf Linien 34.
Reciprocitätsgesetz, quadratisches 104.
Reciprocitätsgesetz der Invariantentheorie 112.
Regeldetri 26, 39.
Reesische Regel 43.
Regiomontanus (53).
Regula falsi 26, 69, 87.
Reguläre Körper 165, 192.
Rhaeticus (67).
Reihen, arithmetische 48, 79; geometrische 48, 79; unendliche 116.
Remigius (43).
Resultante 109.
Reuschle (231).
Reymers (66).
Riccardi (190).
Riccati (120).
Ricci (94).
Richelot (232).
Riemann (251).
Rinderproblem 63.
Riese (57).
Riesse (181).
Roberval (89).
Roch (256).
Rolle (113).
Rosenhain (271).
Roth (57).
Rothe (153).
Roulette 186.
Rudolff (59).
Rufus (36).

Sacro-Bosco (45).
Saint-Venant (205).
Sandrechnung des Archimedes 54.
Saurin (116).
Scheefer (269).
Scherk (209).

Scheybl (57).
Schimpffrechnung 42.
Schindel (49).
Schwenter (72).
Schwerd (186).
Sehnentafel 223.
Sekante 228.
Sekantentafel 229.
Sekunden 224.
Seqt 222.
Serenus (25).
Serret (236).
Sexagesimalsystem 19.
Sextus (29).
Sieb des Eratosthenes 51.
Simpson (134).
Sinus 224, 225.
Sinussatz 227.
Sinustafel 226, 228, 231.
Sluze (98).
Smith (260).
Snell (80), (272).
Sphärik des Menelaus 223.
Spiralen 164, 189.
Spottiswoode (258).
Staudt (207).
Steiner (193).
Stellungsregel für Zahlen 6.
Sterblichkeitstafeln 44, 46.
Stereographische Projektion 167, 210.
Sternpolygone 175.
Sternpolyëder 193.
Stevin (57).
Stewart (139).
Stifel (60).
Strahlenbündel 213.
Strengere Richtung der Analysis 146.
Substitutionentheorie 127.
Subtraktion 50.
Supplementardreieck 226.
Symmetrische Funktionen 109.
Systeme konjugierter Punkte 206.

Tabit (39).
Tangente 225, 228.
Tangententafel 226, 228, 231.
Tangentenproblem 183.
Tartaglia (47).
Taylor (126).
Technische Hochschulen 206.
Teilungsrechnung 40.
Thales (2).
Theätet (12).
Theodorus (9).
Theon (28), (33).
Theorie der algebraischen Gleichungen 88.
Theorie der reciproken Polaren 196.
Thetafunktionen 144.
Thieme (212).
Thymaridas (28).
Tontinen 44.
Torricelli (91).
Tortolini (229).
Transformation algebraischer Gleichungen 120.
Trembley (155).
Trigonometrie 222.
Trochoïde 186.
Tschirnhaus (112).

Ubaldi (56).
Uebersichdividieren 33, 36.
Umhüllungslinien 187.
Unbestimmte Gleichungen 64, 65, 66, 102, 103, 105.
Unendliche Reihen 52.
Unendlichkleines 134.
Unger (178).
Untersichdividieren 36.
Unverzagt (252).
Ursinus (73).

Vandermonde (144).
Van Eyck (56).
Van Schooten (96).
Variationsrechnung 138.
Versicherungsinstitute 45.
Viète (Vieta) (48).
Vincent (78), (191).
Vitruvius (36).
Viviani (99).
Vollständiges Viereck und Vierseit 195.
Vorbedeutungsgeometrie der Babylonier 150.

Wahrscheinlichkeitsrechnung 113.
Wahrscheinlichkeitslehre (geometrische) 218.
Wallace (152).
Wallis (93).
Wechselrechnung 40, 42.
Werner (55).
Wesen der Zahl 90.
Widmann (57).
Wiegand (237).
Witt (96b).
Wolf (122).
Woepcke (249).
Wren (105).
Würfe, v. Staudt's 204.
Würfelverdopplung 62, 79, 161.
Wurzel 75.
Wurzelzeichen 58, 76.

X der Mathematiker 74.

Zahlbegriff 90.
Zählen 5.
Zahlen: befreundete 27, 103; vollkommene 27; überschiessende 27; mangelhafte 27.
Zahlensysteme 5, 6.
Zahlentheorie 101.
Zahlungstermin, mittlerer 40.
Zahlwörter 5.
Zahlzeichen 7, 8, 9, 11.
Zauberquadrate 42, 80.
Zeichen für Unendlich 89.
Zeichenregel Harriot's (Descartes') 119, 182.
Ziffern, Abstammung der modernen 13.
Zinseszinsrechnung 40.
Zinstafeln 41.
Zuzählmethode 31, 35, 37.

Ergänzungen und Berichtigungen.

Seite 4, Zeile 20 setze: »moderne Algebra, Funktionentheorie, projektive Geometrie . . .«

Seite 7, Zeile 4 v. u. fehlt hinter dem Zeichen für 14 ein Punkt.

Seite 99, Zeile 2 v. u. ist der Name »Charles Peirce« beizufügen.

Seite 108. Zu den ältesten Faktorentafeln gehören auch die von *Gauss* (Werke II) erwähnten Burckhardt'schen Tafeln.

Seite 127, Zeile 8 v. u. lies: »*Hermite, Betti, Serret, Poincaré, Jordan* . . .«

Seite 129, Zeile 20 ist anzufügen: »Auch *Lalanne* und *Mehmke* haben sich hier verdient gemacht.«

Seite 138, Zeile 1 lies: »*Poincaré*«.

Seite 141, Zeile 3 v. u. lies $\Pi(\varphi)$ statt $\pi(\varphi)$.

Seite 142, Zeile 19 lies φ statt ψ.

Seite 142, Zeile 20 lies: ». . . auch wohl nach *Gudermann* schreibt . . .«

Seite 144, Zeile 1 v. u. Nach anderer, wohl massgebender Ansicht liegen die grössten Erfolge *Abel's* auf algebraischem Gebiet und auf dem Gebiet der elliptischen Funktionen.

Seite 146, Zeile 14 statt: »vielfache Thetafunktionen« lies: »Thetafunktionen mit mehr Argumenten«.

Seite 146, Zeile 12 v. u. lies: »ausser von p Variabeln von gewissen $\frac{p(p-1)}{2}$ Konstanten abhängt, die auf $3p-3$ Moduln reduzierbar sein müssen, was man bis jetzt noch nicht ausführen kann«.

Seite 146, Zeile 4 v. u.: *Bolzano* ist als Zeitgenosse von *Gauss* vor *Abel* zu nennen.

Seite 146, Zeile 3 v. u. setze nach *Dubois-Reymond*: »*Dini*«.

Seite 147, Zeile 9 lies: »*Nöther, H. Stahl, Schottky, Frobenius* ...«

Seite 147 wäre auch noch der wichtigen Theorie der elliptischen Modulfunktionen, allgemein der Theorie der Funktionen mit Transformationen in sich (der *Fuchs'schen* und *Klein'schen* Funktionen) und ihres Zusammenhangs mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen Erwähnung zu thun. Für die Ausbildung dieser Gebiete haben insbesondere *Dedekind, Fuchs, Schwarz, Poincaré, Klein* gearbeitet.

Seite 152 fehlt in der Figur der Quadratrix ein $\mathring{P}$.

Seite 167, Zeile 5 v. u. lies: »bis von der Zeit der Renaissance, besonders aber von *Descartes* an . . .«

Seite 209, Zeile 12 ist »d. h. die eine Ebene ... abbildeten« zu streichen.

Seite 209, Zeile 4 v. u. ist »sofort« zu streichen.

Seite 210, Zeile 1 statt »welchem« lies »welchen«.

Seite 211, Zeile 8 statt »Entdeckungen« lies »Beziehungen«.

Seite 211, Zeile 9 v. u. lies: »zu denen *Gauss* die Anregung in seinen etc.«

Seite 212, Zeile 11 setze: »Krümmung (curvatura integra)«.

Seite 212, Zeile 12 streiche »(Curvatura integra, Totalkrümmung)«.

Seite 212, Zeile 19 lies: »eines Systems von confocalen Flächen zweiter Ordnung)«.

Seite 212, Zeile 9 v. u. lies »Formeln« statt »Formen«.

Seite 214, Zeile 15 v. u. lies »bis erst *Riemann*, dann im Jahr etc.«

Seite 215, Zeile 6 lies: »Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmass auf.«

Seite 216, Zeile 1 lies: »die räumliche Geometrie etc.«

Seite 216, Zeile 4 lies »unbegrenzt« statt »unendlich«.

Seite 246, Zeile 3 v. u. lies: »192a. *Christof Gudermann*, geboren 1798 zu Winneburg bei Hildesheim, gestorben 1852 als Professor der Mathematik an der Akademie zu Münster.